



إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الفصل الدراسي
الأول

الصف الثاني عشر
الفرعين العلمي والصناعي



JO ACADEMY.com

الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

الصف الثاني عشر

للفرعين العلمي والصناعي

٢٠١٩م / ١٤٤٠هـ



النور
مطبعة



الرياضيات

الفصل الدراسي
الأول

الصف الثاني عشر

للفرعين العلمي والصناعي

الناشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال ملاحظاتكم وآرائكم على هذا الكتاب على العناوين الآتية:

هاتف: ٤٦١٧٣٠٤/٥٠٨ فاكس: ٤٦٣٧٥٦٩ ص.ب. (١٩٣٠) الرمز البريدي: ١١١١٨

E-mail: Scientific.Division@moe.gov.jo: أوعلى البريد الإلكتروني

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في جميع مدارس المملكة الأردنية الهاشمية
بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم ٢٠١٧/٢ م تاريخ ١٧/١/٢٠١٧ م بدءاً من العام الدراسي
٢٠١٧ / ٢٠١٨ م.

الحقوق جميعها محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عمان / الأردن - ص . ب (١٩٣٠)

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(٢٠١٧ / ٣ / ١٥٦٩)

ISBN: 978 - 9957 - 84 - 771-5

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من:

أ.د. حسن زارع هديب (رئيساً) أ.د. أحمد عبد الله رحيل
أ.د. عبد الله محمد رابعة أ.د. معاذ محمود الشيب

وقام بتأليفه كل من:

د. لانا كمال عرفة د. يوسف محمد صبح
د. حسين عسكر الشرفات د. نقين أحمد جوهر
إبراهيم أحمد عميرة أمل حسني الخطيب

التحرير العلمي: نقين أحمد جوهر

التصميم: عمر أحمد أبو عليان
الرسوم: عمر أحمد أبو عليان
التصوير: أديب أحمد عطوان
التحرير الفني: نداء فؤاد أبو شنب
التحرير اللغوي: ميساء عمر الساريسي
الإنجاز: د. عبد الرحمن سليمان أبو صعلبك

دقق الطباعة: هبة ماهر التميمي راجعها: نقين أحمد جوهر

٢٠١٧ / ١٤٣٨ هـ

٢٠١٨ - ٢٠١٩ م

الطبعة الأولى

أعيدت طباعته

الفصل الدراسي الأول

٦	الوحدة الأولى: النهايات والاتصال
٨	الفصل الأول: النهايات
٨	أولاً: مفهوم النهاية
١٥	ثانياً: نظريات النهايات
٢٦	ثالثاً: نهايات اقترانات كسرية
٣٦	رابعاً: نهايات اقترانات مثلثية
٤٥	الفصل الثاني: الاتصال
٤٥	أولاً: الاتصال عند نقطة
٥٧	ثانياً: الاتصال على فترة
٦٦	أسئلة الوحدة
٧٢	الوحدة الثانية: التفاضل
٧٤	الفصل الأول: معدل التغير والمشتقات
٧٤	أولاً: معدل التغير
٨٢	ثانياً: المشتقة الأولى
٩٣	ثالثاً: الاتصال والاشتقاق
١٠٢	الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق
١٠٢	أولاً: قواعد الاشتقاق ١
١١٠	ثانياً: قواعد الاشتقاق ٢
١١٩	ثالثاً: المشتقات العليا
١٢٤	رابعاً: مشتقات الاقترانات المثلثية
١٣١	خامساً: قاعدة السلسلة
١٤٠	سادساً: الاشتقاق الضمني
١٤٨	أسئلة الوحدة

الوحدة الثالثة : تطبيقات التفاضل

١٥٢	الفصل الأول: تطبيقات هندسية وفيزيائية
١٥٤	أولاً: تطبيقات هندسية
١٥٤	ثانياً: تطبيقات فيزيائية
١٦٢	ثالثاً: المعدلات المرتبطة بالزمن
١٦٧	الفصل الثاني: تطبيقات عملية على التفاضل
١٧٥	أولاً: النقاط الحرجة
١٧٩	ثانياً: التزايد والتناقص
١٨٥	ثالثاً: القيم القصوى
١٩٢	رابعاً: التفرع
٢٠٠	خامساً: تطبيقات القيم القصوى
٢١١	أسئلة الوحدة
٢١٥	ملحق (١): قوانين رياضية مهمة



JO | ACADEMY.com

نضع بين أيديكم كتاب الرياضيات للصف الثاني عشر للفرعين العلمي والصناعي، الذي أُعدَّت محتوياته بشكل ينسجم مع التطورات والتغيرات في مختلف المجالات، ومعايير العمليات والمحتوى العالمية، مثل: حل المسألة، والتبرير والبرهان، والربط، والتواصل، والتمثيل، والنمذجة. اعتمدت طرائق رياضية مختلفة في تقديم المحتوى الرياضي، كالاستقراء، وحلّ المشكلات، بالإضافة إلى تقديم المسائل والتمارين التي تنمي مهارات التواصل، والتفكير الرياضي، وحلّت العديد من التمارين والمسائل الرياضية بأكثر من طريقة؛ ما يكسب الطلبة مرونة التفكير.

هذا وقد تم التركيز في الكتاب على تقديم المفهوم الرياضي من خلال الرسوم والأشكال والألوان، مما يساعد على تثبيت المفهوم ومراعاة أنماط تعلم الطلبة المختلفة.

تقع مادة الكتاب في ست وحدات موزعة على فصلين دراسيين، حيث يضم الفصل الأول ثلاث وحدات هي: النهايات والاتصال، والتفاضل، وتطبيقات التفاضل.

أما الفصل الدراسي الثاني فيتضمن ثلاث وحدات هي: التكامل وتطبيقاته، والقطع المخروطية، والإحصاء والاحتمالات.

ونسأل الله أن نكون قد وفقنا في تقديم المعرفة العلمية بطريقة منظمة تنظيمًا منطقيًا ونفسيًا، الأمر الذي يُسهم في فهمها والتمكّن من مهاراتها.



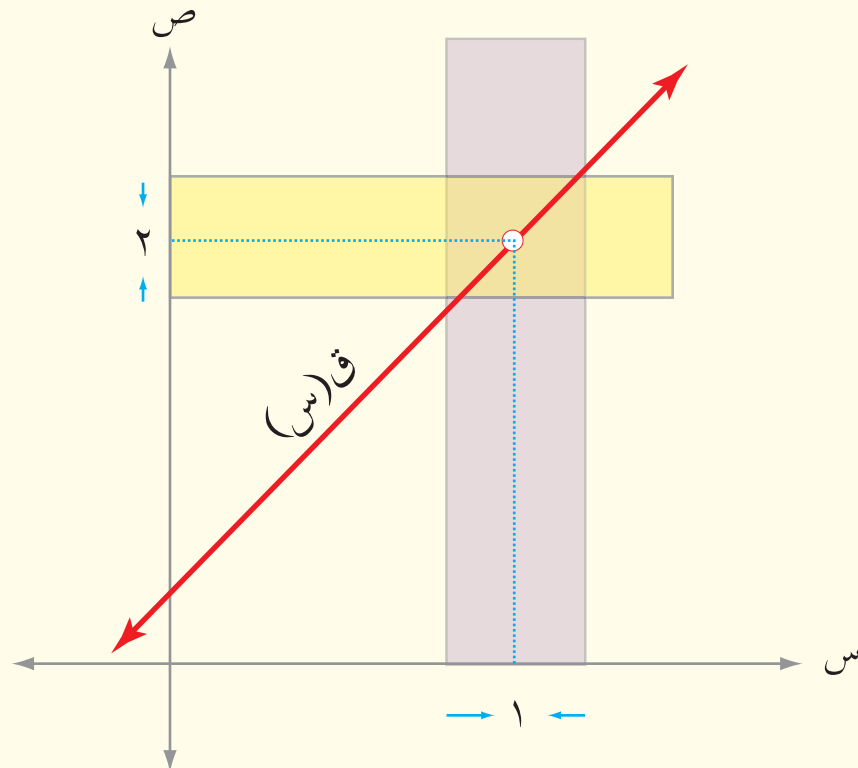
النهايات والاتصال

Limits and Continuity

نشأ علم التفاضل والتكامل لوصف الكيفية التي تتغير فيها الأشياء، ويعتمد كلٌّ من التفاضل والتكامل بصورة أساسية على مفهوم النهاية. تتناول هذه الوحدة مفهومي النهايات والاتصال اللذين يشكلان مقدمة لعلم التفاضل.



JO | ACADEMY.com



يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تعرف مفهوم النهاية.
- إيجاد قيمة نهاية اقتران عند عدد بيانياً.
- تعرف نظريات النهايات وتوظيفها لإيجاد قيمة النهاية عند عدد.
- إيجاد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات نسبية وكسرية ومتشعبة.
- إيجاد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات مثلثية.
- تعرف مفهوم الاتصال عند نقطة، وعلى فترة.
- البحث في اتصال اقتران عند نقطة، وعلى فترة.



IO | ACADEMY.com

النهايات

Limits

الفصل الأول

النتائج

- تتعرف مفهوم النهاية.
- تجد قيمة نهاية اقتران عند عدد بيانياً.
- تتعرف نظريات النهايات وتوظفها لإيجاد قيمة النهاية عند عدد.
- تجد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات نسبية وكسرية ومتشعبة.
- تجد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات مثلثية.

مفهوم النهاية

أولاً

Concept of Limit

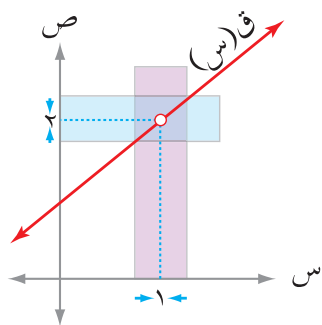
إذا كان $q(s) = \frac{s^2 - 1}{s - 1}$ ، فما مجال الاقتران q ، وهل يمكن التنبؤ بسلوك الاقتران q عندما تقترب قيم s من العدد ١ ؟

تعلمت سابقاً إيجاد مجال الاقتران النسبي ، فمجال الاقتران $q(s) = \frac{s^2 - 1}{s - 1}$ هو $\{s \neq 1\}$ ، لماذا؟
يمكن دراسة سلوك الاقتران q عندما تقترب قيم s من العدد ١ ، من خلال دراسة الجدول الآتي :

٠,٩	٠,٩٩	٠,٩٩٩	٠,٩٩٩٩	١	١,٠٠٠١	١,٠٠١	١,٠١	١,١	s
١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩٩٩	غير معرفة	٢,٠٠٠١	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١	$q(s)$

لاحظ أنه كلما اقتربت قيم s من العدد ١ من جهة اليمين ($s > 1$) ، فإنَّ قيم $q(s)$ تقترب من العدد ٢ ، ويعبر عن ذلك بالرموز: $\lim_{s \rightarrow 1^+} q(s) = 2$
ونُقرأ: نهاية الاقتران $q(s)$ عندما تقترب قيم s من العدد ١ من جهة اليمين تساوي ٢ .

وكلما اقتربت قيم s من العدد ١ من جهة اليسار (أي $s > 1$)، فإن قيم $q(s)$ تقترب أيضا من العدد ٢، ويعبر عن ذلك بالرموز: نهاية $q(s)$ $s \rightarrow 1^-$ $= 2$



الشكل (١-١)

ونُقرأ: نهاية الاقتران $q(s)$ عندما تقترب قيم s من العدد ١ من جهة اليسار تساوي ٢.

وفي حالة نهاية $q(s)$ $s \rightarrow 1^+$ = نهاية $q(s)$ $s \rightarrow 1^-$ ، نقول إنَّ نهاية

$q(s)$ عندما تقترب قيم s من العدد ١ موجودة وتساوي ٢

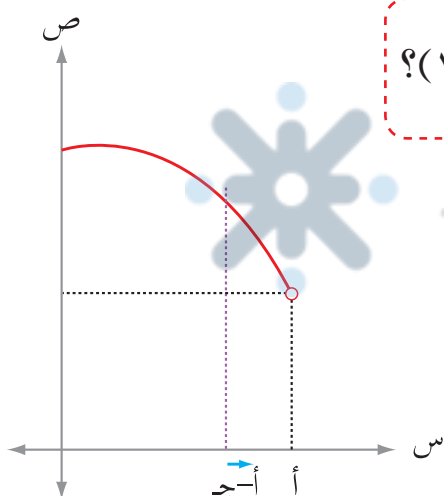
ويعبر عن ذلك بالرموز: نهاية $q(s)$ $s \rightarrow 1$ $= 2$ ،

والشكل (١-١) يوضح منحنى الاقتران $q(s)$.



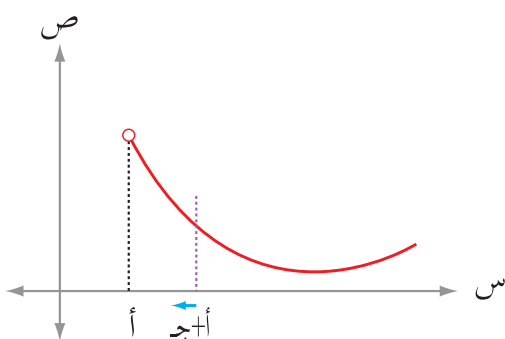
فكر وناقش

لماذا رسمت حلقة على منحنى الاقتران q في الشكل (١-١)؟



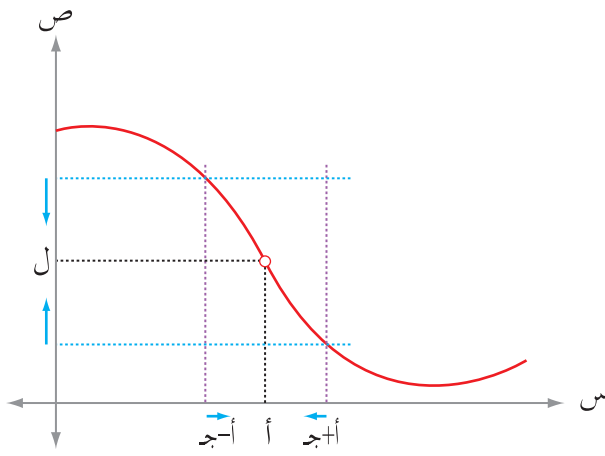
الشكل (٢-١)

ولتحديد نهاية اقتران عندما تقترب قيم s من عدد حقيقي مثل a من جهة اليسار، فإنَّه من الضروري أن يكون الاقتران معرفاً عند a من جهة اليسار على فترة مفتوحة قصيرة الطول على الصورة $(a - \delta, a)$ ، انظر الشكل (٢-١).



الشكل (٣-١)

ولتحديد نهاية اقتران عندما تقترب قيم s من عدد حقيقي مثل a من اليمين، فإنَّه من الضروري أن يكون الاقتران معرفاً عند a من اليمين على فترة مفتوحة قصيرة الطول على الصورة $(a, a + \delta)$ ، انظر الشكل (٣-١).



الشكل (٤-١)

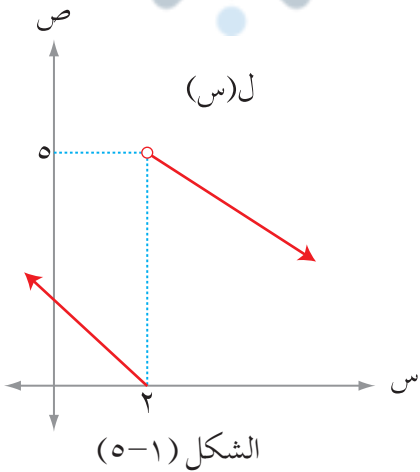
ولإيجاد نهاية اقتران عندما تقترب قيم س من عدد حقيقي مثل أ فإنه من الضروري أن يكون الاقتران معرفاً على فترة مفتوحة قصيرة الطول على الصورة (أ - ج، أ + ج)، وتحتوي العدد أ، حيث ج عدد حقيقي صغير جداً، وليس من الضروري أن يكون الاقتران معرفاً عند العدد أ نفسه). انظر الشكل (٤-١).

تعميم

إذا كانت : $\lim_{s \rightarrow a^+} f(s) = \lim_{s \rightarrow a^-} f(s) = L$ ، حيث أ، ل أعداد حقيقية، فإن:

$\lim_{s \rightarrow a} f(s)$ موجودة، وتكون $\lim_{s \rightarrow a} f(s) = L$

وإذا كانت $\lim_{s \rightarrow a^+} f(s) \neq \lim_{s \rightarrow a^-} f(s)$ ، فإن $\lim_{s \rightarrow a} f(s)$ غير موجودة.



مثال ١

معتمداً الشكل (٥-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ل

المعرف على ح، جد:

$\lim_{s \rightarrow 2} f(s)$

الحل

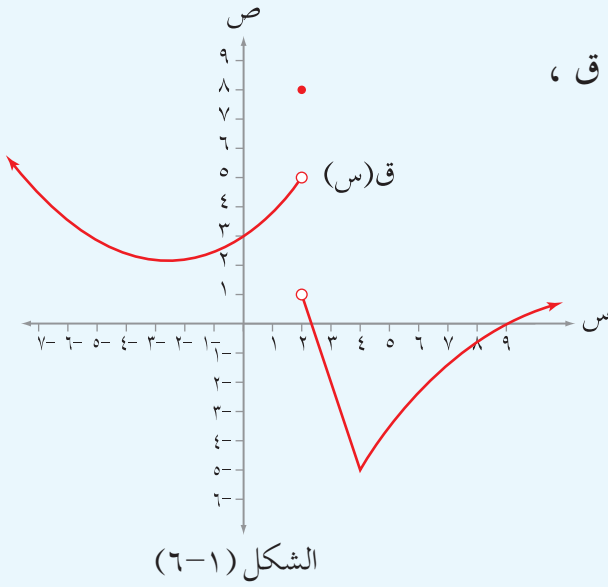
من خلال الشكل (٥-١) لا بد من إيجاد النهاية عن يمين العدد ٢ ويساره (لماذا؟)

$\lim_{s \rightarrow 2^+} f(s) = 0$ ، $\lim_{s \rightarrow 2^-} f(s) = \text{صفرًا}$

بما أن $\lim_{s \rightarrow 2^+} f(s) \neq \lim_{s \rightarrow 2^-} f(s)$ ، إذن $\lim_{s \rightarrow 2} f(s)$ غير موجودة.

تدريب ١

معتمداً الشكل (٦-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق ،
جد كلاً مما يأتي إن أمكن ذلك :



(١) نهايا ق (س)
س ← +٢

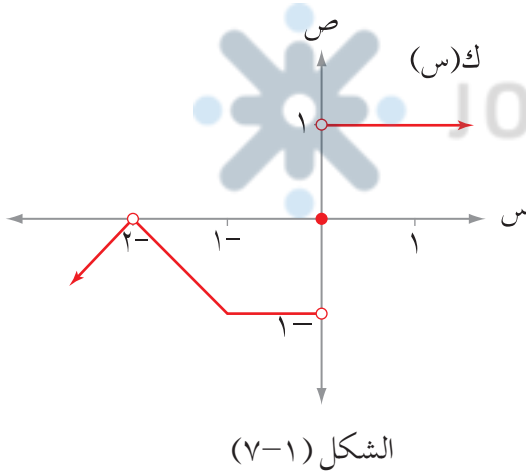
(٢) نهايا ق (س)
س ← -٢

(٣) نهايا ق (س)
س ← ٢

(٤) ق (٢)

مثال ٢

معتمداً الشكل (٧-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ك، جد كلاً مما يأتي :



(١) نهايا ك (س)
س ← ١

(٢) نهايا ك (س)
س ← ٠

(٣) نهايا ك (س)
س ← -٢

(٤) نهايا ك (س)
س ← -١

(٥) نهايا ك (س)
س ← ١

الحل

(١) ١

(٢) غير موجودة

(٣) صفر

(٤) ١ -

(٥) ١ -

تحقق شرط النهاية

لأنَّ النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

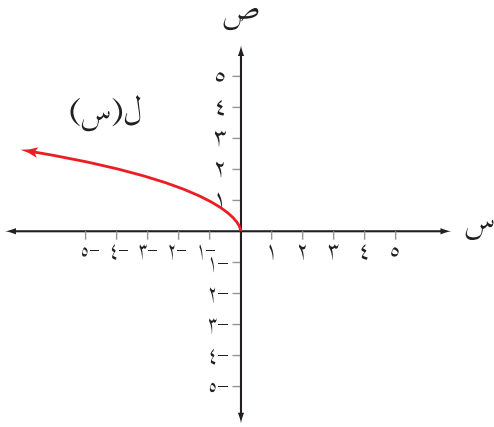
تحقق شرط النهاية

لماذا؟

لماذا؟

مثال ٣

معتمدًا الشكل (٨-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ل(س) $\sqrt{-س}$ ، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (٨-١)

(١) نهاية ل(س) $\leftarrow_{س \rightarrow +}$

(٢) نهاية ل(س) $\leftarrow_{س \rightarrow -}$

(٣) نهاية ل(س) $\leftarrow_{س \rightarrow 0}$

(٤) نهاية ل(س) $\leftarrow_{س \rightarrow 1}$

(٥) نهاية ل(س) $\leftarrow_{س \rightarrow 1-}$

الحل

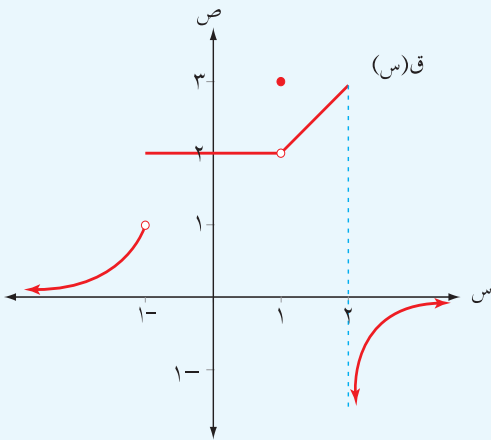
لاحظ أن مجال الاقتران ل هو: $س \geq 0$ ، لماذا؟

- | | |
|----------------|---|
| (١) غير موجودة | الاقتران غير معرف على فترة مفتوحة على يمين الصفر. |
| (٢) صفر | الاقتران معرف على فترة مفتوحة على يسار الصفر. |
| (٣) غير موجودة | الاقتران غير معرف على فترة مفتوحة حول الصفر. |
| (٤) غير موجودة | الاقتران غير معرف على فترة مفتوحة حول العدد ١. |
| (٥) ١ | الاقتران معرف على فترة مفتوحة حول العدد ١ والنهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار. |

تدريب ٢

بالاعتماد على الشكل (٩-١) الذي يمثل منحنى

الاقتران ق المعرف على ح، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (٩-١)

(١) نهاية ق(س) $\leftarrow_{س \rightarrow 1}$

(٢) نهاية ق(س) $\leftarrow_{س \rightarrow 1-}$

(٣) نهاية ق(س) $\leftarrow_{س \rightarrow 0}$

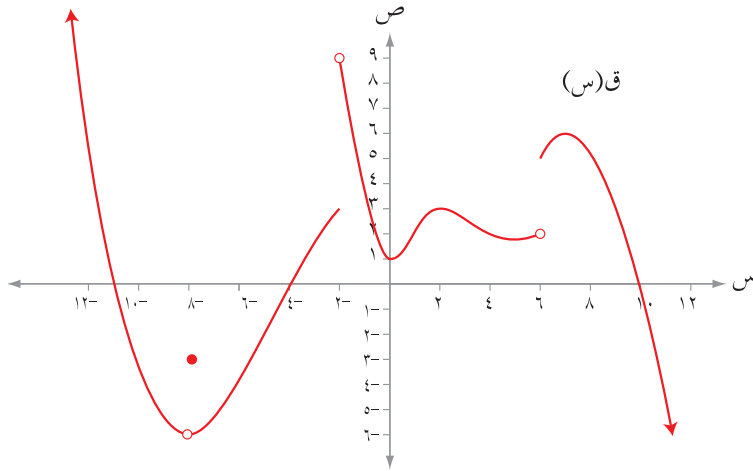
(٤) نهاية ق(س) $\leftarrow_{س \rightarrow -2}$

تحدث



تحدث إلى زملائك بشكل عام عن الحالات التي تكون فيها نهاية ق(س) غير موجودة.

(١) معتمداً الشكل (١٠-١) الذي يمثل منحنى الاقتران q المعروف على h ، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (١٠-١)

أ (نهيا q (س) $s \leftarrow +6$)

ب (نهيا q (س) $s \leftarrow -6$)

ج (نهيا q (س) $s \leftarrow 0$)

د (نهيا q (س) $s \leftarrow 2$)

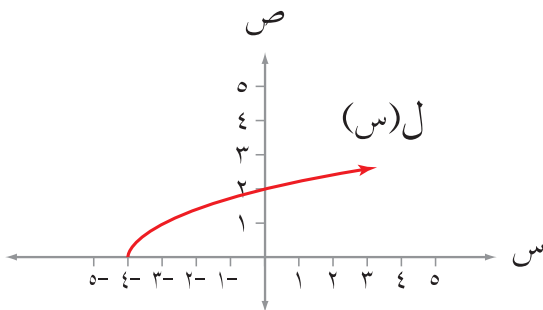
هـ (نهيا q (س) $s \leftarrow +8$)

و (نهيا q (س) $s \leftarrow -8$)

ز (q (٨-)

ح (نهيا q (س) $s \leftarrow 10$)

(٢) معتمداً الشكل (١١-١) الذي يمثل منحنى الاقتران l (س) $l = \sqrt{s+4}$ جد كلاً مما يأتي:



الشكل (١١-١)

أ (مجال الاقتران l

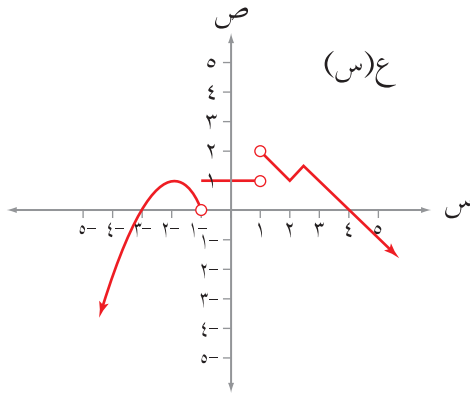
ب (نهيا l (س) $s \leftarrow +4$)

ج (نهيا l (س) $s \leftarrow -4$)

د (نهيا l (س) $s \leftarrow 4$)

هـ (نهيا l (س) $s \leftarrow 0$)

٣) معتمداً الشكل (١-١٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ع، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (١-١٢)

أ) مجموعة قيم أ حيث:

$$\text{نهاية } \leftarrow_{\text{س}} \text{ع} (س) = ١$$

ب) مجموعة قيم جـ حيث:

$$\text{نهاية } \leftarrow_{\text{س}} \text{ع} (س) = ١$$

جـ) مجموعة قيم كـ حيث:

$$\text{نهاية } \leftarrow_{\text{س}} \text{ع} (س) \text{ غير موجودة}$$

د) مجموعة قيم لـ حيث:

$$\text{نهاية } \leftarrow_{\text{س}} \text{ع} (س) = \text{صفرًا}$$

$$٤) \text{ إذا كان ل} (س) = \left. \begin{array}{l} \text{س}^٢ + ١, \text{ س} \in \text{ص} \\ \text{س}^٢ + ٤, \text{ س} \notin \text{ص} \end{array} \right\} \text{ حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة}$$

فجد نهاية ل (س)

$$\text{إذا كان } q(s) = s^4 + s^2, \text{ فجد } \lim_{s \rightarrow -1} \sqrt{q(s)}$$

تعلمت في الدرس السابق إيجاد قيمة النهاية لاقتران عند عدد بيانياً، وفي هذا الدرس ستتعلم إيجاد قيمة نهاية اقتران عند عدد جبرياً باستخدام نظريات النهايات.

نظرية (١)

- (١) إذا كان a ، b عددين حقيقيين، وكان $q(s) = b$ لكل $s \in D$ ، فإن: $\lim_{s \rightarrow a} q(s) = b$
- (٢) إذا كانت $a \in D$ ، n عدد صحيح موجب، وكان $q(s) = s^n$ ، فإن: $\lim_{s \rightarrow a} q(s) = a^n$

نظرية (٢)

- إذا كان q ، h اقترانين، حيث a ، b ، c ، m أعداد حقيقية وكان:
- (١) $\lim_{s \rightarrow a} q(s) = b$ ، $\lim_{s \rightarrow a} h(s) = c$ ، فإن:
 - (١) $\lim_{s \rightarrow a} (q(s) + h(s)) = b + c$
 - (٢) $\lim_{s \rightarrow a} (q(s) - h(s)) = b - c$
 - (٣) $\lim_{s \rightarrow a} (q(s) \times h(s)) = b \times c$
 - (٤) $\lim_{s \rightarrow a} \left(\frac{q(s)}{h(s)} \right) = \frac{b}{c}$ ، حيث $c \neq 0$
 - (٥) $\lim_{s \rightarrow a} \sqrt[n]{q(s)} = \sqrt[n]{b}$ ، (بشرط $b > 0$ إذا كان n عدداً زوجياً)

مثال ١

إذا كان ق(س) = س^٣ + س^٢ + ٥ ، فجد كلاً مما يأتي :

(١) نهيا ق(س) (٢) ق(٢)

الحل

(١) نهيا ق(س) = نهيا (س^٣ + س^٢ + ٥)

= نهيا س^٣ + نهيا س^٢ + نهيا ٥

= ٨ + ٤ + ٥

= ١٧

(٢) ق(٢) = ٢^٣ + ٢^٢ + ٥

= ٨ + ٤ + ٥

= ١٧ ماذا تلاحظ؟

تعميم

إذا كان ق اقتران كثير حدود ، فإن: نهيا ق(س) = ق(أ)

فكر وناقش ؟

أعط مثلاً يبين أن العبارة الآتية غير صحيحة:

« إذا كان ق(أ) = ل ، فإن: نهيا ق(س) = ل »

مثال ٢

جد كلاً من النهايات الآتية:

(٢) نهيا $\frac{٥ + س^٢}{١ + س^٤}$

(١) نهيا $\sqrt{٣ + س}$

(٣) نهيا $\sqrt{٢١ + س^٢} (١ + س)$

الحل

(١) نهيا $\sqrt{٣ + س} = \sqrt{٣ + س} \times ١ = \sqrt{٣ + س} \times \text{نهيا}$

$$\sqrt[n]{(3+s)} \times 1 =$$

$$\sqrt[n]{6} = \sqrt[n]{6} \times 1 =$$

$$3 = \frac{6}{2} = \frac{\sqrt[n]{(5+s)}}{\sqrt[n]{(1+s)}} = \frac{5+s}{1+s} \sqrt[n]{(2)}$$

$$\sqrt[n]{(21+s)} \times \sqrt[n]{(1+s)} = \sqrt[n]{(21+s)} \sqrt[n]{(1+s)}$$

$$15 = 5 \times 3 =$$

تدريب ١

إذا كان $q(s) = 2s$ ، $h(s) = 3s + 1$ ، فجد كلاً مما يأتي:

$$(1) \sqrt[n]{(q(s) + h(s))} \quad (2) \sqrt[n]{\frac{q(s)}{h(s)}}$$

$$(3) \sqrt[n]{(q(s) + h(s))} + 15$$

مثال ٣

جد كلاً مما يأتي:

$$(2) \sqrt[n]{|4 - 2s|}$$

$$(1) \sqrt[n]{|4 - 2s|}$$

$$(4) \sqrt[n]{|4 - 2s|}$$

$$(3) \sqrt[n]{|4 - 2s|}$$

الحل

$$(1) \sqrt[n]{|4 - 2s|} = \sqrt[n]{(4 - 2s)} = 4 - 2s = 0$$

$$(2) \sqrt[n]{|4 - 2s|} = \sqrt[n]{(4 - 2s)} = 4 - 2s = 0$$

(٣) لا بد من إيجاد النهاية عن يمين العدد ٢ ويساره، (لماذا؟)

$$\text{نهاية ق(س)} = \text{نهاية}_{\text{س} \leftarrow 2^+} = (4 - 2^+) = 2^+ = \text{صفرًا}$$

$$\text{نهاية ق(س)} = \text{نهاية}_{\text{س} \leftarrow 2^-} = (4 - 2^-) = 2^- = \text{صفرًا}$$

$$\text{وبما أن نهاية ق(س)} = \text{نهاية}_{\text{س} \leftarrow 2^+} = \text{نهاية ق(س)} = \text{صفرًا}$$

$$\therefore \text{نهاية}_{\text{س} \leftarrow 2} = |4 - 2| = \text{صفرًا}$$

$$(4) \text{نهاية}_{\text{س} \leftarrow 1} = |4 - 2^+| = \text{نهاية}_{\text{س} \leftarrow 1} = (4 - 2^+) = 2^+ = 3$$

تدريب ٢

جد كلاً مما يأتي:

$$(2) \text{نهاية}_{\text{س} \leftarrow 16} = |16 - 16|$$

$$(1) \text{نهاية}_{\text{س} \leftarrow 8} = |8 - 8|$$

$$(3) \text{نهاية}_{\text{س} \leftarrow 16} = |16 - 16|$$

مثال ٤

جد نهاية [٥, ٠ س]

الحل

أعد تعريف [٥, ٠ س] دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح في فترة تحوي العدد ٤

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \text{س} < 2 \\ 2 \leq \text{س} < 4 \\ 4 \leq \text{س} < 6 \end{array} \right\} = [0, 5]$$

لا بد من إيجاد النهاية عن يمين العدد ٤ وعن يساره، (لماذا؟)

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

∴ النهاية $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ غير موجودة



قامت سارة بحل المثال السابق كما يأتي:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = [2] = [4 \times 0.5] = \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

ناقش مع زملائك الأخطاء التي ارتكبتها سارة في حلها للمثال.

تدريب ٣

جد كلاً من النهايات الآتية:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = [2 - x], \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1.5^-} f(x) = [2 - 4x]$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0.1^+} f(x) = [x + 1], \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0.25^-} f(x) = [0.5x]$$

تدريب ٤

إذا كان $q(x) = [2 - x]$ ، فأجب عن كل مما يأتي:

(١) جد قيم x التي تجعل $\lim_{x \rightarrow a} q(x)$ غير موجودة

(٢) جد قيم a التي تجعل $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = 1$



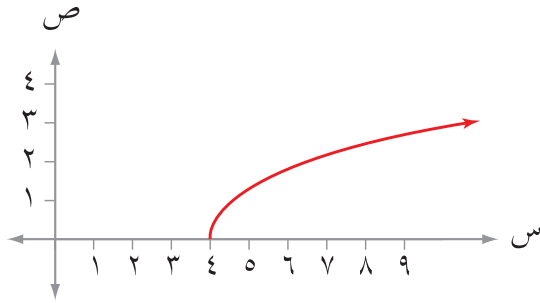
بين إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم لا، مبرراً إجابتك من خلال تقديم أمثلة:

(١) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a$ ، حيث a عدد صحيح.

(٢) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a - 1$ ، حيث a عدد صحيح.

مثال ٥

جد نهايا $\sqrt{s-4}$



الشكل (١٣-١)

الحل

لابد من إيجاد مجال الاقتران

لاحظ أن الاقتران معرف

على الفترة $[\infty, 4]$

انظر الشكل (١٣-١).

ق معرف على يمين العدد ٤

نهايا $\sqrt{s-4} = \sqrt{4-4} = 0$ صفرًا

ق غير معرف على يسار العدد ٤

نهايا $\sqrt{s-4}$ غير موجودة

لماذا؟

∴ نهايا $\sqrt{s-4}$ غير موجودة

فكر وناقش

أعط مثالاً على اقتران مثل ق(س) بحيث تكون ق(١) معرفة، لكن

نهايا ق(س) غير موجودة

تدريب ٥

جد كلاً من النهايات الآتية:

(٢) نهايا $\sqrt{s-7}$

(١) نهايا $\sqrt{s-7}$

(٤) نهايا $\sqrt{s^2-25}$

(٣) نهايا $\sqrt{s^2-25}$

مثال ٦

إذا كان $q(s)$ = $\left\{ \begin{array}{ll} |s| & , s \leq 0 \\ \sqrt{-s} & , s > 0 \end{array} \right.$ ، فجد نهيا $q(s)$ ، ثم جد $q(0)$.

الحل

بما أن الاقتران q يغير قاعدته عند $s = 0$ ، فلا بد من البحث في النهاية عن يمين العدد صفر وعن يساره

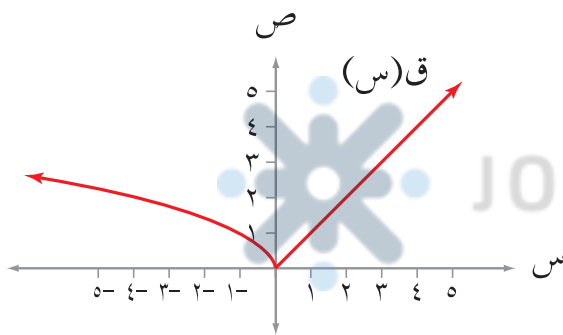
$$\text{نهيا } q(s) = \text{نهيا } |s| = \text{نهيا } s = 0 \quad s \leftarrow 0$$

$$\text{نهيا } q(s) = \text{نهيا } \sqrt{-s} = 0 \quad s \leftarrow 0$$

$$\text{بما أن نهيا } q(s) = \text{نهيا } q(s) = 0 \quad s \leftarrow 0$$

$$\therefore \text{نهيا } q(s) = \text{صفرًا} \quad s \leftarrow 0$$

$$q(0) = \text{صفرًا}$$



الشكل (١٤-١)

انظر الشكل (١٤-١) الذي يبين منحنى الاقتران q .

تدريب ٦

$$\text{إذا كان } q(s) = \left\{ \begin{array}{ll} |s-2| & , s \leq 2 \\ [s-6] & , s > 2 \end{array} \right.$$

فجد نهيا $q(s)$ $s \leftarrow 2$

تدريب ٧

إذا كان $ق(س) = [س + ٥]$ ، $ل(س) = [س - ٤]$ ، فجد كلاً مما يأتي:

(١) $نِهَا ق(س)$ (٢) $نِهَا ل(س)$

(٣) $نِهَا (ق(س) + ل(س))$

ماذا تلاحظ؟

تحدث



تحدث إلى زملائك عن ملاحظاتك التي توصلت إليها من خلال حلك لتدريب (٧).



JO | ACADEMY.com

(١) إذا كان $ق(س) = س^2 - س - ٦$ ، $ل(س) = س^2 - ٢س - ٣$ ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) $نَها (ق(س) + ل(س))$ ب) $نَها ق(س) \times ل(س)$

ج) $نَها \frac{ل(س)}{ق(س)}$ د) $نَها (ل(س))^4$

هـ) $نَها \sqrt[3]{١ - ل(س)}$ و) $نَها \frac{ل(س)}{ق(س)}$

(٢) إذا كانت $نَها ٢ع(س) = ١٠$ ، $نَها ٣ل(س) = ١ + ٧$ ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) $نَها (٢ع(س) + ل(س))$ ب) $نَها (٣ع(س) - ل^٢(س))$

ج) $نَها \frac{\sqrt{ل(س)}}{ع(س)}$ د) $نَها (٣ع(س) - ل^٢(س))$

(٣) جد كلاً مما يأتي:

أ) $نَها |س^٢ - ٢٥|$ ب) $نَها |س^٢ - ٢٥|$

ج) $نَها |س - ٢|$ د) $نَها |س^٢ - ٦٤|$

هـ) $نَها [س - ٢]$ و) $نَها (س[س] + |س|)$

ز) $نَها \sqrt[٥]{س}$ ح) $نَها \sqrt[١]{س - ١}$

ط) $نَها \sqrt[٢]{س^٢ + ٤س + ٤}$

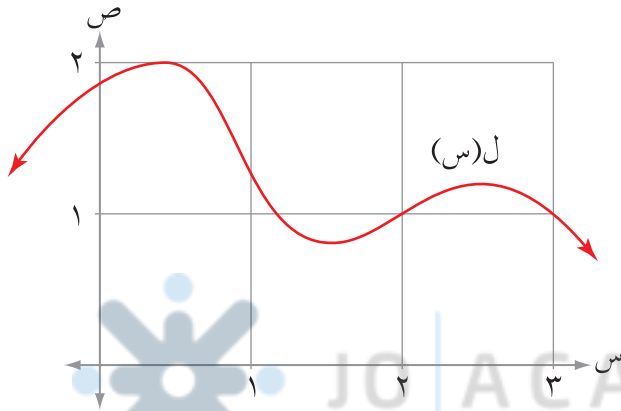
(٤) جد قيم جـ التي تجعل نها $\sqrt{6-s}$ غير موجودة.

(٥) إذا كان $ق(س) = [٢, ٠[س]$ ، فجد قيم جـ التي تجعل نها $[٢, ٠[س] = ١ -$

(٦) إذا كان $ق(س) = \left. \begin{array}{l} ٢-٤ \leq س \\ ٣ > س \end{array} \right\}$ ، فجد قيم جـ التي تجعل نها $[٢, ٠[س]$

وكانت نها $ق(س)$ موجودة، فجد قيمة الثابت أ.

(٧) معتمداً الشكل (١٥-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلاً مما يأتي:



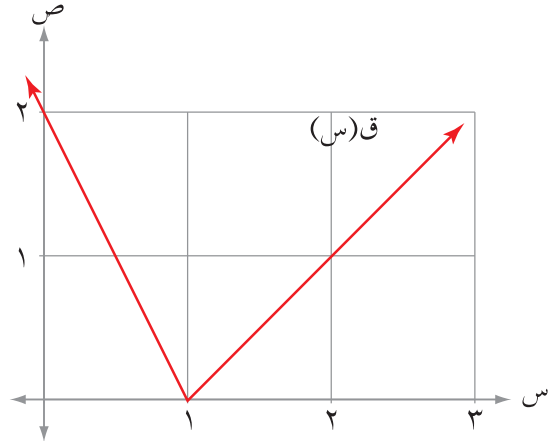
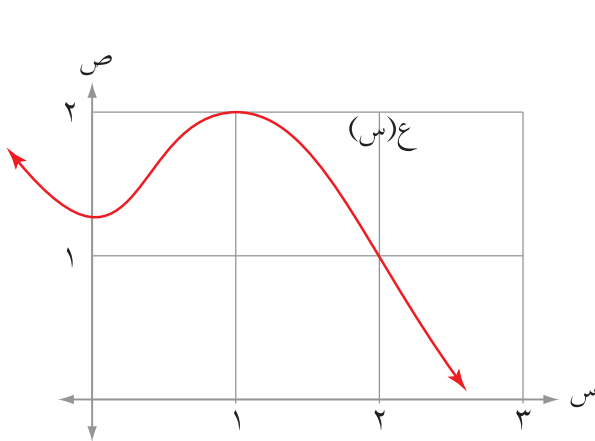
أ) نها $ل(٣-س)$

(إرشاد: افرض $ص = ٣-س$)

ب) نها $ل(س) + ل(س)$

الشكل (١٥-١)

(٨) معتمداً الشكل (١٦-١)، الذي يمثل منحنىي الاقترانين ق، ع، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (١٦-١)

ب) نها $ق(س) \times ع(س)$

أ) نها $ق(س) + ع(س)$

$$\text{ج) نهيا} \left(2 \text{ ق} (س-1) + \text{ع} (س) \right)_{س \leftarrow 1}$$

$$9) \text{ إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة } (-3, 4), \text{ وكانت نهيا} \left(س - \text{ل} (س) \right)_{س \leftarrow 3} = -10$$

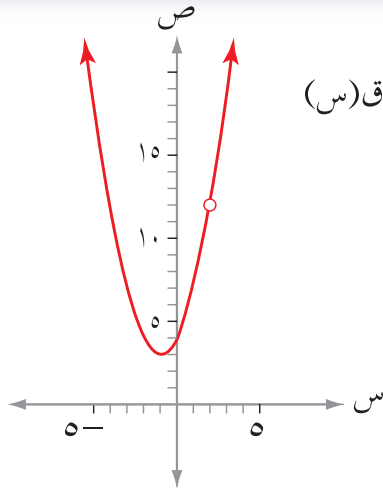
$$\text{فجد نهيا} \left(2 \text{ ق}^2 (س) - 2 \text{ ل} (س) \right)_{س \leftarrow 3}$$

$$10) \text{ إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على } (س-2) \text{ يساوي } 5, \text{ فجد}$$

$$\text{نهيا} \left(3 \text{ ع} (س) + 4 \text{ س}^2 \right)_{س \leftarrow 2}$$



JO | ACADEMY.com



الشكل (١٧-١)

الشكل (١٧-١) يمثل منحنى ق(س) = $\frac{8-s^2}{2-s}$ (س) ق(س) جد كلاً مما يأتي:

(١) نها ق(س) بيانياً.

(٢) نها ق(س) جبرياً.

تعلمت في الدرس السابق إيجاد نهاية اقتران عند نقطة جبرياً باستخدام نظريات النهايات، وفي هذا الدرس ستتعلم إيجاد نهاية اقترانات كسرية. ولايجاد نها ق(س) في المسألة الموضحة بداية الدرس، لا نستطيع استخدام النظرية الخاصة بحساب نهاية خارج قسمة اقترانين (لماذا؟)

حلّ البسط لمحاولة اختصار المقدار (س - ٢) للتخلص من الحصول على صفر في المقام عند تطبيق نظرية (٢) فرع (٤)، كما يأتي:

$$\text{نها ق(س)} = \frac{8-s^2}{2-s} = \frac{(4+s)(2-s)}{(2-s)} \text{ نها ق(س)}$$

لماذا؟

$$\text{نها ق(س)} = (4+s) = 12$$

هل يمكنك التحقق من صحة الحل؟ كيف؟



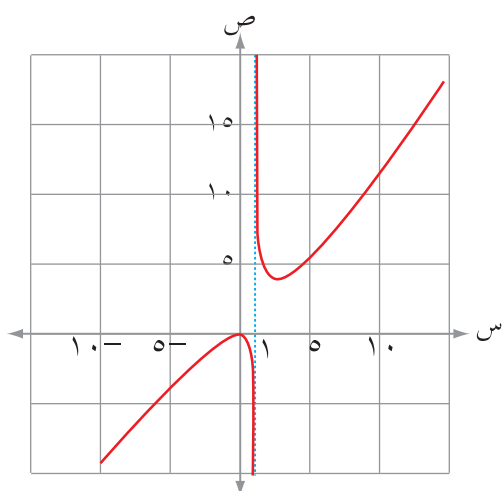
لماذا يمكن اختصار المقدار (س - ٢) في البسط مع المقدار (س - ٢) في المقام عند إيجاد النهاية؟

مثال ١

$$\text{جد نها} \frac{s^2}{1-s}$$

الحل

لاحظ أن نها $\frac{s^2}{1-s} = 0$ صفرًا



الشكل (١٨-١)

وعليه لا يمكن استخدام النظرية الخاصة بحساب نهاية خارج قسمة اقترانين (لماذا؟)

ولا يمكن أيضا إجراء اختصار للتخلص من المقدار $(1-s)$ ، لماذا؟

وبالتالي فإن النهاية هنا غير موجودة.

انظر الشكل (١٨-١) الذي يمثل منحنى الاقتران $q(s) = \frac{s^2}{1-s}$

تحدث ؟

بالاستعانة بالشكل (١٨-١) تحدث لزملائك عن سلوك منحنى الاقتران $q(s) = \frac{s^2}{1-s}$ عندما تقترب قيم s من العدد ١ من جهتي اليمين واليسار.

نتيجة

إذا كانت نها $q(s) = \frac{s^2}{1-s}$ ، حيث l عدد حقيقي ، $l \neq 0$ ، نها $h(s) = 0$ صفرًا ،

فإن نها $\frac{q(s)}{h(s)}$ غير موجودة

تدريب ١

جد كلا من النهايات الآتية:

$$(٢) \text{ نها } \frac{s^2 + 1}{3-s}$$

$$(١) \text{ نها } \frac{s^2 + 3s - 10}{s + 5}$$

مثال ٢

$$\text{جد نهيا} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{-4+s}}{s}$$

الحل

لا نستطيع تطبيق نظرية حاصل قسمة اقترانين لإيجاد النهاية، لماذا؟
ويمكن تبسيط المقدار من خلال توحيد المقامات كما يأتي:

$$\text{نهيا} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{-4+s}}{s} = \text{نهيا} \frac{\frac{-4+s+4}{s \times (-4+s)}}{s}$$

$$= \text{نهيا} \frac{s}{s \times (-4+s)}$$

$$= \text{نهيا} \frac{1}{(-4+s)}$$

$$\frac{1}{-4} =$$

مثال ٣

$$\text{جد نهيا} \frac{\sqrt{3-6+s}}{3-s}$$

الحل

لا نستطيع تطبيق نظرية حاصل قسمة اقترانين، لماذا؟
يمكن تبسيط المقدار من خلال الضرب بمرافق البسط كما يأتي:

$$\text{نهيا} \frac{\sqrt{3-6+s}}{3-s} \times \frac{\sqrt{3+6+s}}{\sqrt{3+6+s}}$$

$$= \text{نهيا} \frac{3-6+s}{(3+6+s)(3-s)}$$

$$= \text{نهيا} \frac{\cancel{3-6+s}}{(3+6+s)(\cancel{3-s})}$$

$$= \text{نهيا} \frac{1}{3+6+s} = \frac{1}{9}$$

تدريب ٢

جد كلاً من النهايات الآتية:

$$(١) \text{ نهايا } \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{s} \right) \left(\frac{1}{25 - 2s} \right) \text{ س} \leftarrow ٥$$

$$(٢) \text{ نهايا } \frac{2 - s}{6 - \sqrt{34 + s}} \text{ س} \leftarrow ٢$$

$$(٣) \text{ نهايا } \frac{\sqrt{2s - 1} - \sqrt{1 + 2s}}{s} \text{ س} \leftarrow ٠$$

مثال ٤

جد كلاً من النهايات الآتية:

$$(٢) \text{ نهايا } \frac{\sqrt{25 - 2s}}{5 - s} \text{ س} \leftarrow ٥$$

$$(١) \text{ نهايا } \frac{\sqrt{25 - 2s}}{5 - s} \text{ س} \leftarrow +٥$$

الحل
(١) لا نستطيع تطبيق نظرية حاصل قسمة اقترانين لإيجاد النهاية، لماذا؟

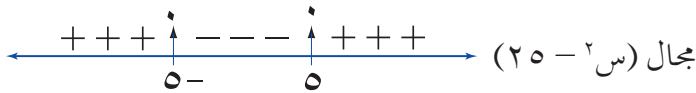
في هذه الحالة لا بد من إيجاد مجال المقدار (لماذا؟)

مجال البسط هو: الفترة $[5, \infty)$ ، والفترة $(-\infty, 5)$

مجال المقام هو: الفترة $[5, \infty)$

إذن مجال المقدار هو: الفترة $(5, \infty)$ (لماذا وُضِعَ رمز الفترة المفتوحة عند العدد ٥؟)

انظر الشكل (١-١٩)



الشكل (١-١٩)

لاحظ أن كلاً من البسط والمقام معرفان على يمين العدد ٥؛ لذا يمكن إيجاد نهاية المقدار عن يمين العدد ٥ فقط

تذكر
إذا كانت $s < ٥$ ، $s < ٥$ ،
فإن:
$$\sqrt{\frac{s}{s-٥}} = \sqrt{\frac{s}{٥-s}}$$

$$\lim_{s \rightarrow ٥^+} \sqrt{\frac{٢٥ - s^2}{٥ - s}}$$

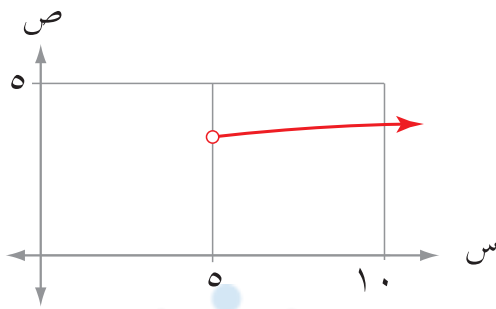
$$= \lim_{s \rightarrow ٥^+} \sqrt{\frac{٢٥ - s^2}{٥ - s}}$$

$$= \lim_{s \rightarrow ٥^+} \sqrt{\frac{(٥-s)(٥+s)}{٥-s}}$$

$$(٢) \lim_{s \rightarrow ٥^+} \sqrt{\frac{٢٥ - s^2}{٥ - s}} \text{ غير موجودة، لماذا؟}$$

انظر الشكل (٢٠-١) الذي يبين منحنى الاقتران

$$q(s) = \sqrt{\frac{٢٥ - s^2}{٥ - s}}$$



الشكل (٢٠-١)

فكر وناقش

(١) بالاستعانة بالشكل (٢٠-١) فسّر لماذا $\lim_{s \rightarrow ٥^-} \sqrt{\frac{٢٥ - s^2}{٥ - s}}$ غير موجودة؟

(٢) أوجد عبدالله نهاية $\lim_{s \rightarrow ٥^-} \sqrt{\frac{٢٥ - s^2}{٥ - s}}$ كما يأتي:

$$\lim_{s \rightarrow ٥^-} \sqrt{\frac{٢٥ - s^2}{٥ - s}} = \lim_{s \rightarrow ٥^-} \sqrt{\frac{٢٥ - s^2}{٥ - s}}$$

$$= \lim_{s \rightarrow ٥^-} \sqrt{\frac{(٥-s)(٥+s)}{٥-s}}$$

اكتشف الخطأ في حله ثم اكتب الصواب.

تدريب ٣

جد كلاً من النهايات الآتية:

$$(٢) \text{ نهايا } \frac{\sqrt{٤ - ٢س}}{\sqrt{٢ - س}}$$

$$(١) \text{ نهايا } \frac{\sqrt{٤ - ٢س}}{\sqrt{٢ - س}}$$

مثال ٥

$$\text{جد نهايا } \frac{١ + ٢س - ٤س^٢}{١ - ٣س}$$

الحل

حسب نظرية العامل فإن المقدار $(١ - س)$ عامل من عوامل البسط ، و عامل من عوامل المقام ، يمكن تحليل البسط باستخدام القسمة الطويلة أو القسمة التركيبية كما يأتي:

$$\begin{array}{r} ١س^٤ \quad ٢س^٣ \quad ١س^٢ \quad ٠س \quad ١س^٠ \\ ١ \quad ٠ \quad ٢- \quad ٠ \quad ١ \\ ١- \quad ١- \quad ١ \quad ١ \quad ١ \\ \hline ٠ \quad ١- \quad ١- \quad ١ \quad ١ \end{array}$$

$$\text{إذن، } ١ + ٢س - ٤س^٢ = (١ - س)(١ - س + ٣س^٢ - س^٢)$$

$$\text{ومنه نهايا } \frac{١ + ٢س - ٤س^٢}{١ - ٣س}$$

$$= \text{نهايا } \frac{(١ - س)(١ - س + ٣س^٢ - س^٢)}{(١ - س)(١ + س + ٢س^٢)}$$

$$= \text{نهايا } \frac{(١ - س + ٣س^٢ - س^٢)}{(١ + س + ٢س^٢)}$$

$$= \text{صفرًا (لماذا؟)}$$

مثال ٦

تذكر

$$\begin{aligned} (أ - ب)(أ + ب + ب^2) &= أ^3 - ب^3 \\ (أ + ب)(أ - ب + ب^2) &= أ^3 + ب^3 \end{aligned}$$

$$\text{جد نهيا} \frac{\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}}{8 - \sqrt{3}}$$

الحل

اضرب كلاً من البسط والمقام بالمقدار $(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + 4)$

$$\therefore \text{نهيا} \frac{\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}}{8 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}}{8 - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + 4}{\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + 4} =$$

$$= \frac{8 - \sqrt{3}}{(8 - \sqrt{3})(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + 4)} =$$

$$= \frac{1}{12} = \frac{1}{4 + 4 + 4}$$

(حلّ المثال (٦) بطريقة أخرى من خلال فرض $\sqrt[3]{3} = \sqrt{3}$)

تدريب ٤

$$\text{جد نهيا} \frac{\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}}{7 - \sqrt{3}}$$

مثال ٧

$$\text{جد نهيا} \frac{\sqrt[3]{4 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{3}}$$

الحل

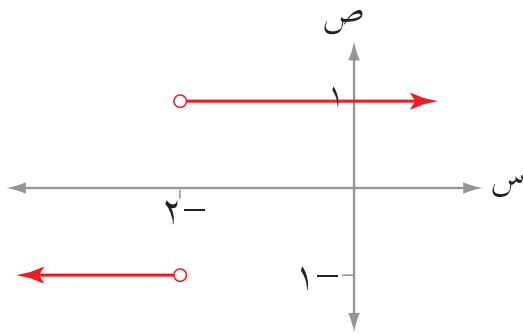
$$\text{نهيا} \frac{\sqrt[3]{4 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^3}}{2 + \sqrt{3}} =$$

تذكر

$$|\sqrt{3}| = \sqrt[3]{3}$$

لا بد من إيجاد النهاية عن يمين العدد ٢- وعن يساره، لماذا؟



الشكل (٢١-١)

$$\frac{|س + ٢|}{س + ٢} \text{ نها }_{س \rightarrow ٢+}$$

$$١ = \frac{س + ٢}{س + ٢} \text{ نها }_{س \rightarrow ٢+}$$

$$\frac{|س + ٢|}{س + ٢} \text{ نها }_{س \rightarrow ٢-}$$

$$١- = \frac{س - ٢}{س + ٢} \text{ نها }_{س \rightarrow ٢-}$$

$$\text{إذن نها }_{س \rightarrow ٢-} \frac{|س + ٢|}{س + ٢} \text{ غير موجودة}$$

انظر الشكل (٢١-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{|س + ٢|}{س + ٢}$.

فكر وناقش

ادرس الشكل (٢١-١) ثم فسّر لماذا نها $\frac{|س + ٢|}{س + ٢} \text{ نها }_{س \rightarrow ٢-}$ غير موجودة؟

(١) جد كلاً من النهايات الآتية:

$$\text{ب) نهـا} \frac{\sqrt[3]{2-s} - 2}{\frac{s}{2} - 4} \quad s \leftarrow 8$$

$$\text{أ) نهـا} \frac{81 - (1+s)^2}{(8-s)} \quad s \leftarrow 8$$

$$\text{د) نهـا} \frac{|1+3s| - 5}{8 + s^3} \quad s \leftarrow 2$$

$$\text{ج) نهـا} \frac{1}{s} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(s+2)} \right) \quad s \leftarrow 0$$

$$\text{و) نهـا} \frac{\sqrt{25 + s^2} - 5}{s - 5} \quad s \leftarrow 5$$

$$\text{هـ) نهـا} \frac{6 - s\sqrt{1+s}}{9 - 3s} \quad s \leftarrow 3$$

$$\text{ح) نهـا} \frac{s^3 + 3s - 4}{s^2 - 1} \quad s \leftarrow 1$$

$$\text{ز) نهـا} \frac{\sqrt{1-s^2}}{1-s} \quad s \leftarrow 1$$

$$\text{ي) نهـا} \frac{s^2 - [2s]}{25 - 4s^2} \quad s \leftarrow 2,5$$

$$\text{ط) نهـا} \frac{\sqrt{49 - s^2}}{\sqrt{7-s}} \quad s \leftarrow 7$$

$$\text{ك) نهـا} \frac{\sqrt{2s-1} - \sqrt{2s+1}}{s} \quad s \leftarrow 0$$

(٢) إذا كان ق كثير حدود، وكانت نهـا $\frac{ق(s) + 5}{3-s} = 4$ ،

نهـا $\frac{ق(s) - (2s + 3)}{3} = 7$ ، فجد قيمة الثابت ب.

(٣) إذا كانت نهيا $\frac{أس^٢ + ٢بس + ٢}{١ - س} = ١$ ، فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب.

(٤) جد نهيا $\frac{(٦٤)س - ٨}{٨ - ١س}$

(٥) إذا كان ل(س) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{٢٧ - س^٣}{١٨ + س^٢ + ٢س} ، س \leq ع \\ س + ٥ ، س > ع \end{array} \right\}$

فجد قيمة الثابت ع التي تجعل نهيا ل(س) موجودة.

(٦) إذا كان ق(س) $\frac{س^٢ + ٥}{س^٢ - ٥س + ٦}$

فجد قيم أ التي تجعل نهيا ق(س) غير موجودة.

(٧) إذا كانت نهيا $\frac{ق(س) - ٦}{١ - س} = ٨$ ، وكانت نهيا $\frac{س^٢ + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$

فجد قيمة الثابت ب.

(٨) إذا كان هـ كثير حدود، وكانت نهيا $\frac{٥ + (س)هـ}{س} = \frac{١}{٢}$ ،

نهيا (هـ - (س) - ٥ + ٣ ج) = ٢ ، فجد قيمة الثابت ج.

نهايات اقترانات مثلثية

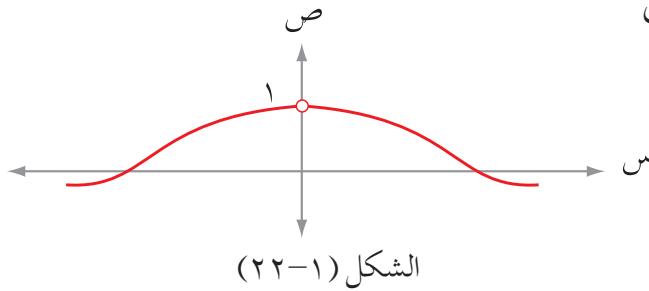
Limits of Trigonometric Functions

رابعاً

معتماً الشكل (٢٢-١) الذي يمثل منحنى

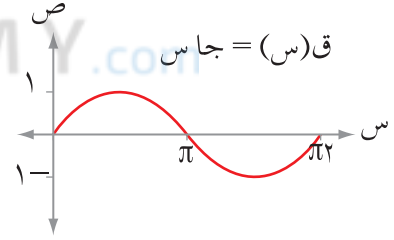
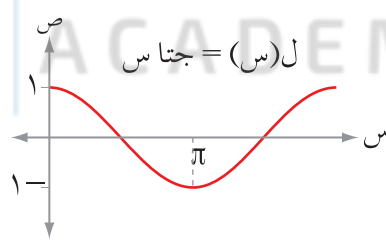
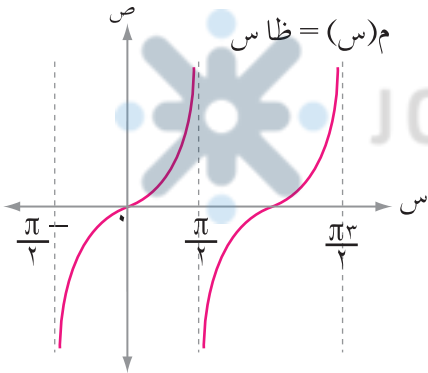
$$\frac{\text{جاس}}{\text{س}} = \text{ق(س)}$$

ما نهيا ق(س)؟



تعلمت سابقاً إيجاد نهايات اقترانات كسرية، وفي هذا الدرس ستتعلم إيجاد نهايات اقترانات مثلثية.

ادرس الشكل (٢٣-١)، ثم أجب عما يليه:



الشكل (٢٣-١)

(٢) جا π =

(١) نهيا جاس $\pi \leftarrow$ =

(٤) جتا π =

(٣) نهيا جتا س $\pi \leftarrow$ =

(٦) ظا ٠ =

(٥) نهيا ظا س $\leftarrow$ =

ماذا تلاحظ؟

من خلال إجابتك عما سبق يمكن التوصل إلى ما يأتي:

تعميم

$$(1) \text{ نهيا جاس } = \text{ جا } \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{أ}}$$

$$(2) \text{ نهيا جتاس } = \text{ جتا } \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{أ}}$$

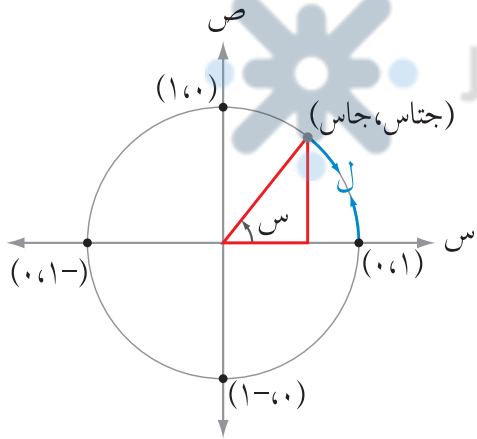
$$(3) \text{ نهيا ظاس } = \text{ ظا } \underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{أ}}, \exists \text{ ح} - \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots \right\}$$

مثال ١

جد نهيا (جاس + جتاس)

الحل

نهيا (جاس + جتاس) = نهيا جاس + نهيا جتاس (نظريات النهايات)



الشكل (٢٤-١)

الشكل (٢٤-١) يمثل دائرة الوحدة، لاحظ أن رأس الزاوية س في الوضع القياسي يقع على مركز الدائرة، وطول القوس (ل) المقابل لها يمثل قياسها بالتقدير الدائري (لماذا؟)، والإحداثي الصادي لنقطة تقاطع ضلع انتهائهما مع الدائرة يمثل جاس (لماذا؟)، كلما صغر قياس الزاوية س فإن طول القوس (ل) ≈ طول العمود أي أن:

س ≈ جاس، وبذلك فإن:

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{أ}} \text{ نهيا جاس} = 1$$

تحدث



بالاستعانة بالشكل (٢٢-١) تحدث إلى زملائك عن سلوك منحني ق(س) = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ عندما تقترب قيم س من العدد صفر من جهة اليمين ومن جهة اليسار.

نهـا $\frac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١$ ، حيث س زاوية بالتقدير الدائري.

نهـا $\frac{\text{س}}{\text{جاس}} = ١$ ، حيث س زاوية بالتقدير الدائري.

في هذا الكتاب، سنعمد قياس الزوايا بالتقدير الدائري، مالم يذكر غير ذلك.

مثال ٢

جد كلاً من النهايات الآتية:

$$(١) \text{ نهـا } \frac{\text{جاس}^٣}{\text{س}^٥} \quad (٢) \text{ نهـا } \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$$

الحل

(١) افرض أن $\text{س} = \text{ص}$ ، إذن $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = ١$ ، وعندما $\text{س} \leftarrow ٠$ ، فإن $\text{ص} \leftarrow ٠$ ، ومنه:

$$\text{نهـا } \frac{\text{جاس}^٣}{\text{س}^٥} = \text{نهـا } \frac{\text{جاص}}{\frac{\text{ص}}{٣} \times ٥} = \frac{٣}{٥} \text{ نهـا } \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} \\ \frac{٣}{٥} = ١ \times \frac{٣}{٥} =$$

حل آخر

$$\text{نهـا } \frac{\text{جاس}^٣}{\text{س}^٥} = \text{نهـا } \frac{\text{جاس}^٣}{\text{س}^٣} \times \frac{\text{جاس}^٣}{\text{س}^٢}$$

$$\text{نهـا } \frac{\text{جاس}^٣}{\text{س}^٥} = \frac{٣}{٥} \times \frac{\text{جاس}^٣}{\text{س}^٣}$$

$$(٢) \text{ نهـا } \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$$

$$= \text{نهـا } \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \text{ س}$$

$$= \text{نهـا } \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \text{نهـا } \frac{١}{\text{جتاس}} = ١$$



فكر وناقش

من خلال دراستك مثال (٢) ماذا تتوقع أن تكون قيمة كل مما يأتي:

$$(١) \text{ نهيا } \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} \quad (٢) \text{ نهيا } \frac{\text{س}}{\text{ظا أس}}$$

نتيجة

$$(١) \text{ نهيا } \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$$

$$(٢) \text{ نهيا } \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}, \text{ حيث أ، ب أعداد حقيقية، ب} \neq 0 \text{ صفرًا}$$

مثال ٣

$$\text{جد نهيا } \frac{\text{س}^٣}{\text{جا س}}$$

الحل

$$\text{نهيا } \frac{\text{س}^٣}{\text{جا س}} = \frac{\text{نهيا } \frac{\text{س}^٣}{\text{س}}}{\frac{\text{جا س}}{\text{س}}} = \frac{\text{س}^٢}{\frac{\text{جا س}}{\text{س}}} = \frac{\text{س}^٢}{\text{س}} = \text{س}$$



فكر وناقش

اكتشف الخطأ في ما يأتي، واكتب الصواب:

$$\text{نهيا } \frac{\text{جا أس}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

تدريب ١

جد كلاً من النهايات الآتية:

$$(١) \text{ نهيا } \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \quad (٢) \text{ نهيا } \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

$$(٣) \text{ نهيا } \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

$$(٤) \text{ نهيا } \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

$$(٥) \text{ نهيا } \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

مثال ۴

$$\frac{\text{جد نہیا} \cdot \text{س} \leftarrow ۰}{\text{س جاس} - \text{ظا ۵ س}} = \frac{\text{جا ۴ س} - \text{س} \leftarrow ۰}{\text{س}}$$

الحل

بقسمة حدود المقدار علی س ، حیث س $\leftarrow ۰$ تتضمن س $\neq$ صفرًا فتكون:

$$\frac{\text{س جاس} - \text{ظا ۵ س}}{\text{س}} = \frac{\text{جا ۴ س} - \text{س} \leftarrow ۰}{\text{س}} = \frac{\text{س جاس} - \text{ظا ۵ س}}{\text{س}}$$

(نظریات النهایات)

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{نہیا} \cdot \text{س} \leftarrow ۰ - \text{جا ۴ س}}{\text{س}} = \frac{\text{نہیا} \cdot \text{س} \leftarrow ۰ - \text{جا ۴ س}}{\text{س}} \\ &= \frac{۰ - ۵}{۲ - ۴} = \frac{۰ - ۵}{۲} = \frac{۰}{۲} = ۰ \end{aligned}$$



JO | ACADEMY.com

تدریب ۲

$$\frac{\text{جد نہیا} \cdot \text{س} \leftarrow ۰}{\text{س} - \text{جا ۳ س} + \text{ظا ۵ س}} = \frac{\text{س} - \text{جا ۳ س} + \text{ظا ۵ س}}{\text{س}}$$

مثال ۵

$$\frac{\text{جد نہیا} \cdot \text{س} \leftarrow ۰}{\text{س} - \text{جا ۳ س} + \text{ظا ۵ س}} = \frac{\text{س} - \text{جا ۳ س} + \text{ظا ۵ س}}{\text{س}}$$

الحل

لا نستطيع استخدام نظریات النهایات ، لماذا؟

$$\frac{\text{نہیا} \cdot \text{س} \leftarrow ۰}{\text{س} - \text{جا ۳ س} + \text{ظا ۵ س}} = \frac{\text{س} - \text{جا ۳ س} + \text{ظا ۵ س}}{\text{س}} = \frac{\text{س} - \text{جا ۳ س} + \text{ظا ۵ س}}{\text{س}}$$

(جتا ۲ س = ۱ - ۲ جتا ۲ س)

$$\frac{\text{نہیا} \cdot \text{س} \leftarrow ۰}{\text{س} - \text{جا ۳ س} + \text{ظا ۵ س}} = \frac{\text{س} - \text{جا ۳ س} + \text{ظا ۵ س}}{\text{س}} = \frac{\text{س} - \text{جا ۳ س} + \text{ظا ۵ س}}{\text{س}}$$

$$\frac{۲}{۳} = ۱ \times ۱ \times \frac{۲}{۳} =$$

حُلّ مثال (٥) بطريقة أخرى

إرشاد : $\frac{١ - جتا ٢ س}{٣ س ٢} = \frac{جتا ٠ - جتا ٢ س}{٣ س ٢}$



ناقش مع زملائك طريقة أخرى لثالثة حل مثال (٥)

مثال ٦

جد نهيا $\frac{جتا ٦ س - جتا ٤ س}{٢ س}$

الحل

لا نستطيع استخدام نظريات النهايات، لماذا؟

باستخدام القانون:

جتاس - جتاص = $٢ - جتا ٢ س$ (جتا $\frac{٢ س + ص}{٢}$) (جتا $\frac{٢ س - ص}{٢}$) تجد أن:

نهيا $\frac{جتا ٦ س - جتا ٤ س}{٢ س} = \frac{جتا ٢ س - جتا ٤ س}{٢ س} = \frac{٢ - جتا ٢ س}{٢ س}$

= $\frac{٢ - جتا ٢ س}{٢ س} = \frac{٢ - جتا ٢ س}{٢ س} \times \frac{١}{١} = \frac{٢ - جتا ٢ س}{٢ س}$

= $١ \times ٥ \times ٢ -$

= $١٠ -$

تدريب ٣

جد كلاً مما يأتي:

(٢) نهيا $\frac{٨ س + جتا ٤ س}{٢ س}$

(١) نهيا $\frac{١ - جتا س}{٢ س}$

$$\text{جد نهيا} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{4}}$$

الحل

لا نستطيع استخدام نظريات النهايات. (لماذا)
بالضرب بمرافق المقدار جاس - جتاس

$$\frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{4}} \times \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} = \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{4}} \times \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}$$

$$= \frac{\text{جاس}^2 - \text{جتاس}^2}{(\text{س} - \frac{\pi}{4})(\text{جاس} + \text{جتاس})}$$

(جتاس² = جتاس - جاس)

$$= \frac{-\text{جتاس}^2}{(\text{س} - \frac{\pi}{4})(\text{جاس} + \text{جتاس})}$$

(جتاس = جاس - \frac{\pi}{4})

$$= \frac{-\text{جاس}(\text{جاس} - \frac{\pi}{4})}{(\text{س} - \frac{\pi}{4})(\text{جاس} + \text{جتاس})}$$

إخراج ٢ عاملاً مشتركاً

$$= \frac{-\text{جاس}(\text{جاس} - \frac{\pi}{4})}{(\text{س} - \frac{\pi}{4})(\text{جاس} + \text{جتاس})}$$

افرض ص = \frac{\pi}{4} - س

$$= \frac{1}{(\text{جاس} + \text{جتاس})} \times \frac{-\text{جاس}(\text{جاس} - \frac{\pi}{4})}{\text{س} - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$$

تدريب ٤

جد كلاً مما يأتي:

$$(٢) \text{ نهيا} \frac{\text{جتاس} \frac{\pi}{2}}{١ - \text{س}}$$

$$(١) \text{ نهيا} \frac{\text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{2}}$$

تمارين ومسائل

جد النهاية المطلوبة في كل من التمارين من (١) إلى (٢١) :

$$(١) \text{ نها } \frac{\text{حا}^8 \text{س}}{\text{س}^6} \quad (٢) \text{ نها } \frac{\text{س} + \text{ظا}^2 \text{س} - \text{جا} \text{س}}{\text{س}}$$

$$(٣) \text{ نها } (\text{قاس} + \text{ظا}^5 \text{س}) \quad (٤) \text{ نها } (٧ \text{س}^3 \text{ظتا}^2 (٢ \text{س}) \text{قتا} (٥ \text{س}))$$

$$(٥) \text{ نها } \frac{١ + \text{جتا}^4 \text{س} - ٢ \text{جتا}^2 \text{س}}{\text{س}^2} \quad (٦) \text{ نها } \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س جا س}}$$

$$(٧) \text{ نها } \frac{\text{جتاس}}{\pi - \text{س}^2} \quad (٨) \text{ نها } \frac{\text{ظا س} - \text{جا س}}{\text{س}}$$

$$(٩) \text{ نها } \frac{١ - \text{جا س}}{\frac{\pi}{4} \text{س}^2 - (\pi - \text{س}^2)} \quad (١٠) \text{ نها } \frac{\text{قا} (٢ \text{س}) - ١}{\text{س}^2}$$

$$(١١) \text{ نها } \frac{٢ \text{س}^2 + \text{س ظا}^2 \text{س}}{\text{جا}^2 \text{س}} \quad (١٢) \text{ نها } \frac{\text{حتا}^2 \text{س} - \text{جا}^2 \text{س}}{\frac{\pi}{4} \text{س} - \frac{\pi}{4}}$$

$$(١٣) \text{ نها } \frac{١ - \text{جتا}^6 \text{س}}{\text{جتا}^8 \text{س} - ١} \quad (١٤) \text{ نها } ٣ \text{س} (\text{ظتا}^2 \text{س} + \text{قتا}^3 \text{س})$$

$$(١٥) \text{ نها } \frac{\text{ظتا س}}{\frac{\pi}{4} \text{س}^2 - \pi} \quad (١٦) \text{ نها } \frac{\text{س جا س}}{\pi - \text{س}}$$

$$(١٧) \text{ نهيا } \frac{\text{جا} (س + ٤)}{س^٢ - ١٦} \quad \text{س} \leftarrow ٤$$

$$(١٨) \text{ نهيا } \frac{س^٢ - \text{جا} س}{س \sqrt{١ - \text{جتا} س}} \quad \text{س} \leftarrow ٠$$

$$(١٩) \text{ نهيا } \frac{\text{جاس}}{\pi - \frac{س}{٣}} \quad \text{س} \leftarrow \pi^٣$$

$$(٢٠) \text{ نهيا } \frac{س - ٢}{\pi س} \quad \text{س} \leftarrow ٢$$

$$(٢١) \text{ نهيا } \frac{\text{جاس} + \text{حا} أ}{س + أ} \quad (\text{إرشاد: جاس} + \text{جا ص} = ٢ \text{ جا} \left(\frac{س + ص}{٢} \right) \text{ جتا} \left(\frac{س - ص}{٢} \right))$$

$$(٢٢) \text{ إذا كانت نهيا } \frac{\text{جا} أ س}{س^٢} = \text{نهيا } \frac{\text{ظا} ٣ س}{ب س - س} = ٦ \text{ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .}$$

$$(٢٣) \text{ إذا كان ق(س) = } \frac{\text{جا} (٢ - \pi س)}{س^٥} \text{ ، فجد نهيا ق(س)}$$



JO | ACADEMY.com

الاتصال

Continuity

الفصل الثاني

النتائج

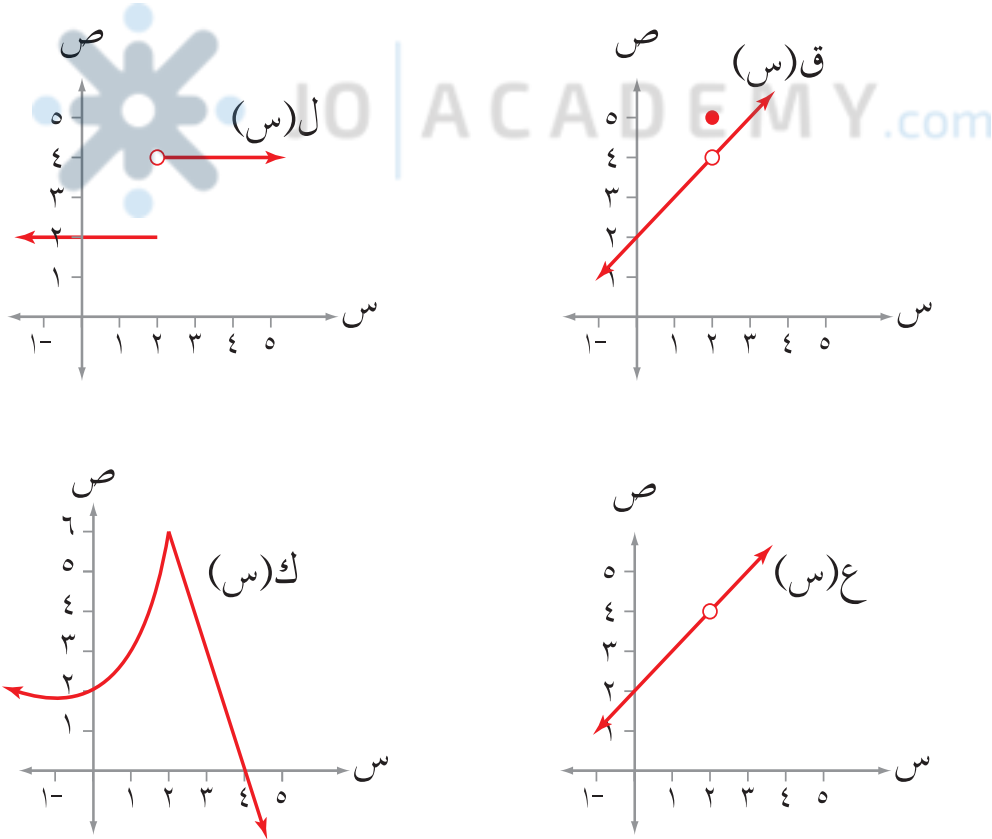
- تتعرف اتصال اقتران عند نقطة وعلى فترة.
- تبحث في اتصال اقتران عند نقطة وعلى فترة.

Continuity at a point

الاتصال عند نقطة

أولاً

معتمداً الشكل (١-٢٥) أجب عن الأسئلة التي تليه:



الشكل (١-٢٥)

- (١) نهيا ق (س) = ، ق (٢) =
 (٢) نهيا ل (س) = ، ل (٢) =
 (٣) نهيا ع (س) = ، ع (٢) =
 (٤) نهيا ك (س) = ، ك (٢) =

ماذا تلاحظ؟ أيّ الاقتران كان منحناه غير منقطع (متصل) على فترة مفتوحة تحوي العدد ٢؟
 في مثل هذه الحالة نقول إن الاقتران ك **اقتران متصل** عند $s = 2$ ، بينما نقول إن كلاً من الاقتران
 ق ، ل ، ع **غير متصل** (منفصل) عند $s = 2$



فكر وناقش

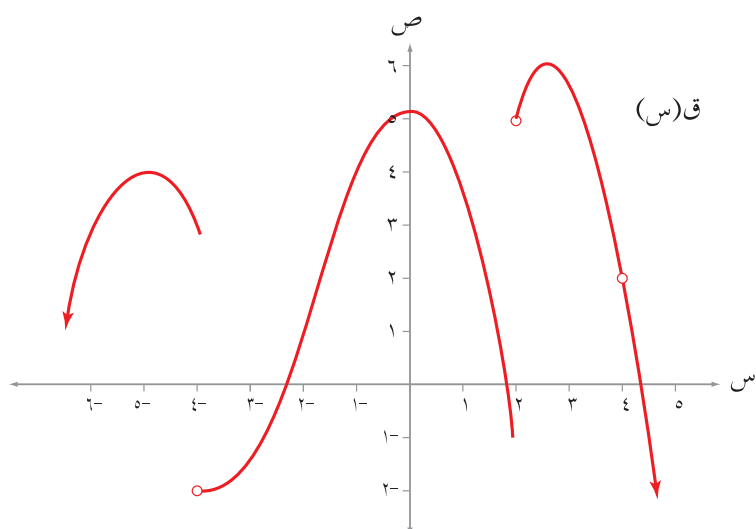
تحدث بلغتك الخاصة عن شروط اتصال اقتران عند نقطة.

تعميم

- يكون الاقتران ق متصلاً عند $s = a$ ، إذا حقق الشروط الآتية:
- (١) ق معرف عند $s = a$ ، أي أن ق (أ) موجودة كعدد حقيقي.
 - (٢) نهيا ق (س) موجودة.
 - (٣) نهيا ق (س) = ق (أ)

مثال ١

معتماً الشكل (٢٦-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ما قيم س التي يكون عندها ق اقتراناً غير متصل، مع ذكر السبب ؟



الشكل (٢٦-١)

الحل

س_١ = -٤ ، لأن نهاية ق(س) غير موجودة.

س_٢ = ٢ ، لأن نهاية ق(س) غير موجودة.

س_٣ = ٤ ، لأن ق غير معرف عند س = ٤

مثال ٢

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & س > ٢ \\ ٦ - س & س \leq ٢ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

الحل

(١) ق(س) معرف عند س = ٢ ، ق(٢) = ٤ -

(٢) ابحث في نهاية ق عن يمين العدد ٢ ويساره، لماذا؟

نهاية ق(س) = نهاية (٦ - س) = ٤ -

نهاية ق(س) = نهاية $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ = نهاية $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ = ٤ -

$$\text{بما أن نهيا ق(س) = نهيا ق(س) = -4} \quad \text{س} \leftarrow 2$$

∴ نهيا ق(س) موجودة وتساوي ق(2)

∴ ق متصل عند س = 2

تدريب ١

$$\text{إذا كان ق(س) = } \frac{|4 - \text{س}|}{4 + \text{س}} \text{ ، } \text{س} \neq -4 \text{ ، فابحث في اتصال ق عند س = 4}$$

مثال ٣

إذا كان ق(س) = [5, 10 - س] ، فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = 7

الحل

أعد تعريف الاقتران ق دون كتابة رمز أكبر عدد صحيح في فترة تحوي العدد 7

لاحظ أن ق(س) = 1 - في الفترة [6, 8) ، وأن 7 ∈ [6, 8)

ابحث في شروط الاتصال عند س = 7

ق معرف عند س = 7 ، حيث إن: ق(7) = 1 -

$$\text{نهيا ق(س) = نهيا ق(س) = } \frac{1 - \text{س}}{7 - \text{س}} \quad \text{س} \leftarrow 7$$

$$\text{بما أن نهيا ق(س) = ق(7) = } \frac{1 - 7}{7 - 7} \quad \text{س} \leftarrow 7$$

∴ ق(س) متصل عند س = 7

تدريب ٢

- (١) إذا كان ق(س) = [س] ، فما مجموعة قيم س التي يكون عندها ق اقتراناً غير متصل؟
 (٢) اقترح قاعدة لاقتران أكبر عدد صحيح بحيث يكون متصلاً عند س = ١ ، وغير متصل عند س = ٢

مثال ٤

$$\left. \begin{array}{l} \text{أس}^3 - \text{ب} + \text{س} + ١ \\ \text{س} > ١ ، \\ \text{س} = ١ ، \\ \text{س} < ١ ، \end{array} \right\} \text{إذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} ٥ \\ \text{س}^2 - ٢(\text{أ} + \text{ب}) + ٢ \end{array} \right\}$$

متصلاً عند س = ١ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

الحل

بما أن ق متصل عند س = ١ إذن:

$$(١) \text{ نهـيا } \left(\text{أس}^3 - \text{ب} + \text{س} + ١ \right)_{\text{س}=1} = \text{ق(١)}$$

$$\textcircled{1} \quad ٥ = ١ + \text{ب} - \text{أ}$$

$$(٢) \text{ نهـيا } \left(\text{س}^2 - ٢(\text{أ} + \text{ب}) + ٢ \right)_{\text{س}=1} = ٥$$

$$\textcircled{2} \quad ٥ = ٢ + (\text{أ} + \text{ب}) - ١$$

بتبسيط المعادلتين $\textcircled{1}$ ، $\textcircled{2}$ ينتج:

$$\text{أ} - \text{ب} = ٤ ، \quad \text{أ} + \text{ب} = ٢ -$$

$$\text{وبحلها ينتج } \text{أ} = ١ ، \quad \text{ب} = ٣ -$$

تدريب ٣

$$\left. \begin{array}{l} \text{أس}^2 + \text{ب} \\ \text{س} > ٣ ، \\ \text{س} = ٣ ، \\ \text{س} < ٣ ، \end{array} \right\} \text{إذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} ٦ \\ \text{أس}^2 - ٢\text{ب} \end{array} \right\}$$

متصلاً عند س = ٣ ، فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

نظريات الاتصال (Continuity Theorems)

نظرية (١)

إذا كان q اقتران كثير حدود فإن q متصل على $\mathbb{C}$.

نظرية (٢)

إذا كان q ، l اقترانين متصلين عند $s = a$ ، فإن:

$$(١) \text{ الاقتران } q + l \text{ متصل عند } s = a$$

$$(٢) \text{ الاقتران } q - l \text{ متصل عند } s = a$$

$$(٣) \text{ الاقتران } q \times l \text{ متصل عند } s = a$$

$$(٤) \text{ الاقتران } \frac{q}{l} \text{ متصل عند } s = a, l(a) \neq 0.$$

$$(٥) \frac{q}{l} \text{ غير متصل عند } s = a, \text{ إذا كانت } l(a) = 0.$$

نظرية (٣)

إذا كان q اقتراناً متصلًا عند $s = a$ ، $q(s) \leq 0$ ، في فترة مفتوحة تحتوي a ، فإن الاقتران

$$h(s) = \sqrt{q(s)} \text{ اقتران متصل عند } s = a$$

برهان نظرية (٢) فرع (١)

المعطيات: الاقترانان q ، l متصلان عند $s = a$

المطلوب: إثبات أن الاقتران $q + l$ متصل عند $s = a$

البرهان:

افرض أن $h = q + l$

هـ $(a) = q(a) + l(a)$ من تعريف الاقتران هـ.

وحيث إن q ، l اقترانان متصلان عند $s = a$ فإن:

$$\lim_{s \rightarrow a} h(s) = \lim_{s \rightarrow a} q(s) + \lim_{s \rightarrow a} l(s)$$

$$= q(a) + l(a)$$

وعليه فإن الاقتران هـ متصل عند $s = a$

تدريب ٤

برهن الفروع: ٢، ٣، ٤ من نظرية (٢)

فكر وناقش



اكتشف الخطأ في العبارات الآتية، ثم اكتب الصواب:

(١) الاقتران ل(س) = [س + ١] - [س]، غير متصل عند س = ٠؛ لأنه نتج عن طرح اقتران

من آخر، وكلاهما غير متصل عند س = ٠

(٢) إذا كان ق(س) = س - ١ اقتراناً متصلاً عند س = ١، فإن $\sqrt{ق(س)}$ هو اقتران متصل

عند س = ١.

مثال ٥

$$\left. \begin{array}{l} ٢ > س ، \quad ٢ - ٣ س \\ ٢ \leq س ، \quad ٣ س \end{array} \right\} = ع(س) ، \quad \left. \begin{array}{l} ٢ > س ، \quad ٤ + ٢ س \\ ٢ \leq س ، \quad ٦ + س \end{array} \right\} = ق(س)$$

فابحث في اتصال الاقتران (ق + ع) عند س = ٢

الحل

(١) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

$$٨ = ق_{س \leftarrow ٢}^{+}(س)$$

$$٨ = ق_{س \leftarrow ٢}^{-}(س) ، \quad ٨ = ق(٢)$$

∴ ق(س) متصل عند س = ٢

(٢) ابحث في اتصال الاقتران ع عند س = ٢

$$٦ = ع_{س \leftarrow ٢}^{+}(س)$$

$$٦ = ع_{س \leftarrow ٢}^{-}(س) ، \quad ٦ = ع(٢)$$

∴ ع(س) متصل عند س = ٢

وحسب نظرية (٢) فرع (١)، فإنَّ (ق + ع) (س) متصل عند س = ٢

إرشاد: يمكنك حل المثال السابق من خلال إيجاد قاعدة الاقتران (ق+ع)(س)، ثم البحث في اتصاله عند س = ٢

تدريب ٥

إذا كان ق(س) = $\left. \begin{matrix} ١ < س ، \\ ١ \leq س ، \end{matrix} \right\} = ل(س) ،$ $\left. \begin{matrix} ١ < س ، \\ ١ \leq س ، \end{matrix} \right\} = ل(س) ،$ فابحث في اتصال الاقتران (ق × ل) عند س = ١ بطريقتين.

مثال ٦

إذا كان ق(س) = (س-١)² ، ل(س) = [س-٢] ، فابحث في اتصال الاقتران (ق×ل) عند س = ٣

الحل

ق(س) = (س-١)² متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود متصل على مجاله.
ل(س) = [س-٢] غير متصل عند س = ٣ لأنها نقطة تفرع.

لا نستطيع استخدام نظرية (٢) فرع (٣) للبحث في اتصال الاقتران ق × ل ، لماذا؟
لابد من إيجاد قاعدة الاقتران (ق×ل)(س) والبحث في اتصاله عند س = ٣

$$(ق \times ل)(س) = (س-١)² \times [س-٢]$$

اكتب الاقتران بصورة مجزأة في فترة تحوي العدد ٣ مثل (٢ ، ٤]

$$(ق \times ل)(س) = \left. \begin{matrix} (س-١)² \times [س-٢] ، \\ (س-١)² \times [س-٢] ، \end{matrix} \right\}$$

ابحث في اتصاله عند س = ٣

$$نهيّا (ق \times ل)(س) = (س-١)² \times [س-٢] = ٨ - ٣ = ٥$$

$$\text{نهيا}_{\text{س} \leftarrow 3} (ق \times ل) (س) = 1 - (1 - 3) \times 2 = 4 -$$

بما أن نهيا_{س ← 3} (ق × ل) (س) ≠ نهيا_{س ← 3} (ق × ل) (س) إذن نهيا_{س ← 3} (ق × ل) (س) غير موجودة

∴ (ق × ل) (س) غير متصل عند س = 3

تحدث



ناقش زملاءك في الحالات التي لا نستطيع فيها توظيف نظريات الاتصال في الحكم على اتصال الاقترانات.

تدريب ٦

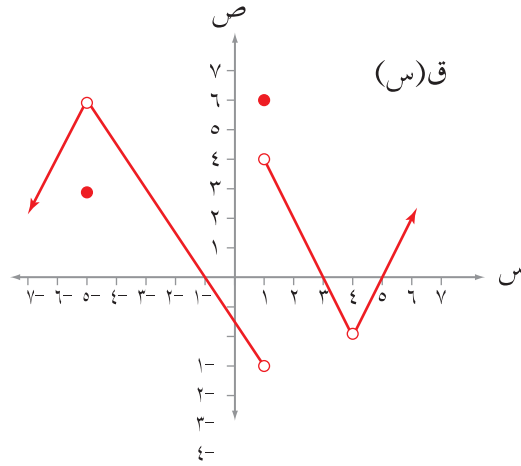
إذا كان ق(س) = (س - ٥)² ، ه(س) = [س + ٢]

فابحث في اتصال الاقتران (ق × ه) عند كل من س = ٢ ، س = ٥



JO | ACADEMY.com

(١) معتمداً الشكل (١-٢٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ما قيم س التي يكون عندها ق غير متصل مع ذكر السبب ؟



الشكل (١-٢٧)

(٢) إذا كان $C(S) = [4 - S]$ ، فابحث في اتصال الاقتران ق عند $S = 1, 2, 5$

(٣) ابحث في اتصال الاقتران ق $(S) = \frac{S^2 - 1}{1 - S}$ عند $S = 1$

(٤) ابحث في اتصال الاقتران هـ $(S) = \frac{S^2 - 4}{2 - S}$ عند $S = 2$

$$(٥) \text{ إذا كان ق } (S) = \begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & , S > ٠ \\ ١ - جتاس & , S \leq ٠ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند $S = ٠$

$$(٦) \text{ إذا كان ل } (S) = \begin{cases} \sqrt{3 - س} & , س < ٣ \\ |٩ - س^٢| & , س \geq ٣ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند $S = ٣$

$$(٧) \left\{ \begin{array}{l} \frac{|س| - ٢}{س - ٢} = (س) \text{ إذا كان ق} \\ س \neq ٢ , \\ س = ٢ , \end{array} \right.$$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

$$(٨) \left\{ \begin{array}{l} ٦ + س , \\ س - ٢ , \\ ٢ - س \geq ٢ , \\ ٢ > س \\ ٢ \leq س , \\ ١ - س \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان ك}$$

فابحث في اتصال الاقتران ك عند س = ٢

$$(٩) \left\{ \begin{array}{l} \frac{١}{س} + س^٢ , \\ ٢ \geq س > ٠ , \\ ٣ + [س] , \\ ٣ > س > ٢ , \\ ٣ = س , \\ ٧ \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان ع}$$

متصلاً عند س = ٢ ، فجد قيمة الثابت أ.

$$(١٠) \left\{ \begin{array}{l} \frac{س^٣ + س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١} = (س) \text{ إذا كان ل} \\ س \neq ١ , \\ س = ١ , \end{array} \right.$$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = ١

$$(١١) \left\{ \begin{array}{l} س^٢ + س , \\ [٤ + س] , \\ س > ٢ , \\ س = ٢ , \\ س < ٢ , \end{array} \right.$$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

$$(١٢) \left. \begin{array}{l} ٢ \geq ٠, \quad ٢ + ب \\ ٣ \geq ٢, \quad ٥ - |س| \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان ل}$$

فجد قيمة الثابت ب التي تجعل الاقتران ل متصلاً عند س = ٢

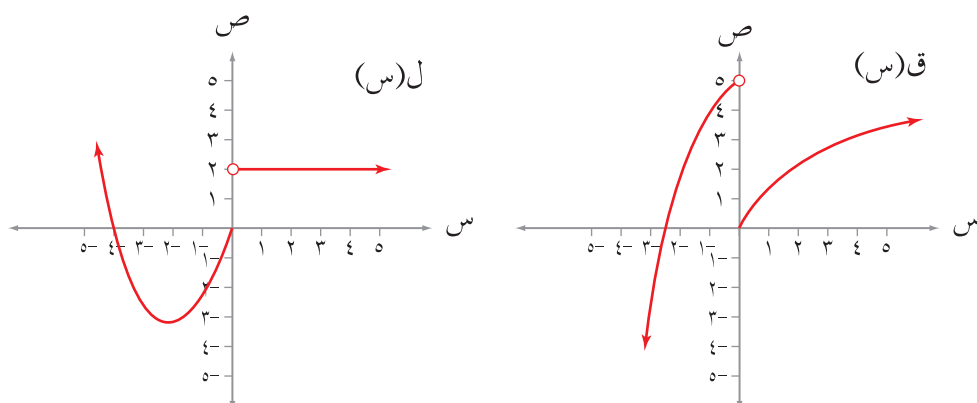
$$(١٣) \left. \begin{array}{l} ٣ + س, \quad ٥ + س \\ ٢ - ٢, \quad ٤ - ٢ \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان ق}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٣

$$(١٤) \left. \begin{array}{l} ١ > س, \quad ٢ + ٢ \\ ١ \leq س, \quad |٢| \end{array} \right\} = (س) \text{ هـ}, \quad \left. \begin{array}{l} ١ > س, \quad ٢ + ٢ \\ ١ \leq س, \quad ٢ + ٢ \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان ق}$$

فابحث في اتصال الاقتران (ق + هـ) عند س = ١

معتماً الشكل (٢٨-١) الذي يمثل منحني كل من الاقتران ق والاقتران ل المعرفين على ح،
جد كلاً مما يأتي:



الشكل (٢٨-١)



(٣) نهـال (س)

(١) نهـاق (س)

(٤) ل (٠)

(٢) ق (٠)

ماذا تلاحظ؟

تعلمت في الدرس السابق شروط اتصال اقتران عند نقطة. وفي هذا الدرس ستتعرف شروط
اتصال اقتران على فترة.

في الشكل (٢٨-١) لا بد أنك لاحظت أن نهـاق (س) = ق (٠) = ٠ وفي هذه الحالة

يكون ق متصلًا عند $s = ٠$ من اليمين.

وأن نهـال (س) = ل (٠) = ٠ ، وفي هذه الحالة يكون ل متصلًا عند $s = ٠$ من اليسار.

فكر وناقش

ادرس الشكل (٢٨-١) ثم أجب عن كل مما يأتي:

(١) ما شروط اتصال اقتران عند عدد من اليمين؟

(٢) ما شروط اتصال اقتران عند عدد من اليسار؟

انظر الشكل (٢٩-١) لاحظ أن:

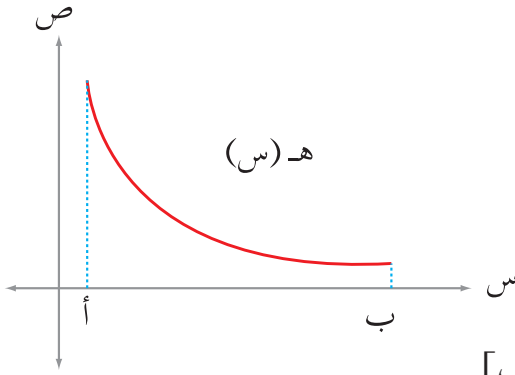
الاقتران ه متصل عند $s = a$ من اليمين، لماذا؟

وأيضا الاقتران ه متصل عند $s = b$ من اليسار، لماذا؟

كما أن الاقتران ه متصل عند كل s تنتمي للفترة

(أ، ب)، لماذا؟

في هذه الحالة نقول إن الاقتران ه متصل على الفترة [أ، ب].



الشكل (٢٩-١)

تحدث

تحدث بلغتك الخاصة عن شروط اتصال اقتران على فترة مغلقة، وفترة مفتوحة، وفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة.

تعريف

إذا كان q اقتراناً معرفاً على الفترة [أ، ب] فإن:

(١) q يكون متصلاً عند $s = a$ من اليمين، إذا كانت نهاية $q(s)$ عند $s = a$ هي $q(a)$.

(٢) q يكون متصلاً عند $s = b$ من اليسار، إذا كانت نهاية $q(s)$ عند $s = b$ هي $q(b)$.

(٣) q يكون متصلاً على الفترة (أ، ب) إذا كان متصلاً عند كل $s \in (أ، ب)$.

(٤) q يكون متصلاً على الفترة [أ، ب] إذا كان متصلاً على الفترة (أ، ب) ومتصلاً عند

$s = a$ من اليمين، و متصلاً عند $s = b$ من اليسار.

ملاحظة

- (١) يكون الاقتران ق متصلًا على الفترة $[أ ، ب)$ ، إذا كان متصلًا عند كل $س \in (أ ، ب)$ ، ومتصلًا عند $س = أ$ من اليمين.
- (٢) يكون الاقتران ق متصلًا على الفترة $(أ ، ب]$ ، إذا كان متصلًا عند كل $س \in (أ ، ب)$ ، ومتصلًا عند $س = ب$ من اليسار.
- (٣) يكون الاقتران ق متصلًا على الفترة $(أ ، \infty)$ إذا كان متصلًا عند كل $س \in (أ ، \infty)$.
- (٤) يكون الاقتران ق متصلًا على الفترة $(-\infty ، ب)$ إذا كان متصلًا عند كل $س \in (-\infty ، ب)$.
- (٥) يكون الاقتران ق متصلًا على $ح$ إذا كان متصلًا عند كل $س \in ح$.

فكر وناقش

اقرأ العبارات الآتية ثم أجب بنعم أو لا، وقدم تبريرًا:

- (١) كثيرات الحدود متصلة على $ح$.
- (٢) الاقترانات النسبية متصلة على $ح$.
- (٣) إذا كان الاقتران متصلًا على $ح$ ، فإنه يكون متصلًا على أية فترة جزئية منها.
- (٤) الاقترانان الدائريان (جاس، جتاس) متصلان على $ح$.

تحدث

تحدث إلى زملائك كيف تحدد نقاط عدم الاتصال للاقترانات الدائرية (القاطع، قاطع التمام، الظل، ظل التمام).

مثال ١

$$\left. \begin{array}{l} ٢ + س \geq ٢ - س > ١ \\ ٤ + س \geq ١ \geq س \geq ٥ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة $[٥ ، ٢-]$

الحل

(١) الاقتران ق متصل على الفترة $(٢- ، ١)$ لأنه على صورة كثير حدود.

(٢) الاقتران ق متصل على الفترة (١، ٥) لأنه على صورة كثير حدود.

(٣) ابحث في اتصال الاقتران ق عند نقطة التفرع وهي: $s=1$

$$\text{نهاية ق (س)} = 1 + 4 = 5$$

$$\text{نهاية ق (س)} = 2 \times 1 + 2 = 4$$

$$\text{ق (1)} = 5$$

بما أن نهاية ق (س) $\neq$ نهاية ق (س)، إذن نهاية ق (س) غير موجودة،

وعليه فإن الاقتران ق غير متصل عند $s=1$

(٤) ابحث في اتصال الاقتران ق عند $s=-2$ من اليمين.

$$\text{نهاية ق (س)} = 2 \times (-2) + 2 = -2$$

$$\text{ق (-2)} = -2، \text{ بما أن نهاية ق (س)} = \text{ق (-2)}$$

∴ الاقتران ق متصل عند العدد -2 من اليمين.

(٥) ابحث في اتصال ق عند $s=5$ من اليسار.

$$\text{نهاية ق (س)} = 9، \text{ ق (5)} = 9$$

∴ الاقتران ق متصل عند $s=5$ من اليسار.

مما سبق ينتج أن الاقتران ق متصل على الفترة $[-2، 5] - \{1\}$.

تدريب ١

$$\left. \begin{array}{l} s \geq 3، \\ s \geq 5، \\ s = 7، \end{array} \right\} \begin{array}{l} s \\ s + 20 \\ 9 \end{array} = \text{إذا كان ق (س)}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة $(3، 7)$ ، والفترة $[3، 7]$.

مثال ٢

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \geq 3, \quad \frac{64 - 3\text{س}}{4 - \text{س}} \\ \text{س} < 3, \quad \frac{4 + \text{س}}{4 - \text{س}} \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على مجاله.

الحل

قاعدة الاقتران ق تتفرع عند $\text{س} = 3$

في الفترة $(-\infty, 3)$ الاقتران ق متصل لأنه على صورة اقتران نسبي معرف على مجاله.

في الفترة $(3, \infty)$ الاقتران ق متصل لأنه على صورة كثير حدود.

ابحث في اتصال الاقتران ق عند نقطة التفرع وهي: $\text{س} = 3$

$$\text{ق}(3) = 37$$

$$\text{نهاية ق(س)}_{\text{س} \rightarrow 3^-} = 4 + 3 - = 1$$

$$\text{نهاية ق(س)}_{\text{س} \rightarrow 3^+} = \frac{64 - 3 \cdot 3}{4 - 3} = \frac{55}{1} = 55$$

بما أن نهاية ق(س) $\neq$ نهاية ق(س)، إذن نهاية ق(س) غير موجودة

وعليه فإن الاقتران ق غير متصل عند $\text{س} = 3$

مما سبق ينتج أن الاقتران ق متصل على $\text{ح} - \{3\}$

تدريب ٢

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq 5, \quad \frac{25 - 2\text{س}}{5 - \text{س}} \\ \text{س} = 5, \quad \frac{5 + \text{س}}{5 - \text{س}} \end{array} \right\} = \text{إذا كان ل(س)}$$

فابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله.

إذا كان $ق(س) = |٣س - ٩|$ ، فابحث في اتصال الاقتران $ق$ على الفترة $[١, ٥]$

الحل

اكتب الاقتران $ق$ بصورة مجزأة دون استخدام رمز القيمة المطلقة على الفترة $[١, ٥]$ ، فتحصل على:

$$ق(س) = \left. \begin{array}{l} ٣س - ٩ \\ ٩ - ٣س \end{array} \right\} \begin{array}{l} ١ \leq س < ٣ \\ ٣ \leq س \leq ٥ \end{array}$$

(١) الاقتران $ق$ متصل على الفترة $(١, ٣)$ ، لأنه على صورة كثير حدود.

(٢) الاقتران $ق$ متصل على الفترة $(٣, ٥)$ ، لأنه على صورة كثير حدود.

(٣) ابحث في اتصال الاقتران $ق$ عند نقطة التفرع $س = ٣$

$$\text{نهاية } ق(س) = ٩ - ٣ \times ٣ = ٠ \quad \text{س} \leftarrow ٣^-$$

$$\text{نهاية } ق(س) = ٣ \times ٣ - ٩ = ٠ \quad \text{س} \leftarrow ٣^+$$

بما أن نهاية $ق(س) = ق(٣) = ٠$ إذن $ق(س)$ متصل عند $س = ٣$

(٤) ابحث في اتصال الاقتران $ق$ عند $س = ١$ من اليمين:

$$\text{نهاية } ق(س) = ٣ - ٩ = ٦ \quad \text{س} \leftarrow ١^+$$

إذن $ق(س)$ متصل عند العدد ١ من اليمين.

(٥) ابحث في اتصال الاقتران $ق$ عند $س = ٥$ من اليسار:

$$\text{نهاية } ق(س) = ٩ - ٥ \times ٣ = ٦ \quad \text{س} \leftarrow ٥^-$$

إذن $ق(س)$ متصل عند العدد ٥ من اليسار.

وعليه فإن الاقتران $ق$ متصل على الفترة $[١, ٥]$.

تدريب ٣

إذا كان $ق(س) = |١س - ٠|$ ، فابحث في اتصال الاقتران $ق$ على الفترة $[١, ٩]$.

مثال ٤

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 - \text{س} - 30 \\ \text{أ} \text{س} - 6 \end{array} \right\} = \text{إذا كان هـ (س)}$$

، $\text{س} < 6$ ،
، $\text{س} = 6$ ،
، $\text{س} > 6$ ،
ب س

متصلاً على ح ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب .

الحل

بما أنَّ الاقتران هـ متصل على ح إذن فهو متصل عند كل نقطة في ح .

وعليه: نهيا $\text{س} \leftarrow 6$ ق(س) = ق(6)

$$\text{نهيا} \text{س} \leftarrow 6 = \frac{\text{س}^2 - \text{س} - 30}{\text{أ} \text{س} - 6} = 1$$

$$\text{نهيا} \text{س} \leftarrow 6 = \frac{(\text{س} - 6)(\text{س} + 5)}{\text{أ} (\text{س} - 6)} = 1$$

$$\frac{11}{\text{أ}} = 1 ، \text{ ومنه } \text{أ} = 11$$

وكذلك نهيا $\text{س} \leftarrow 6$ ق(س) = ق(6)

نهيا $\text{س} \leftarrow 6$ ب س = ق(6)

$$1 = \text{ب} \times 6$$

$$\frac{1}{6} = \text{ب} \text{ ومنه } \text{ب} = \frac{1}{6}$$

تدريب ٤

$$\left. \begin{array}{l} \text{جا أ س} \\ 5 \text{ س} \\ 2 \\ \text{ب (2 + س)} \end{array} \right\} = \text{إذا كان ع (س)}$$

، $\text{س} \geq \pi - 0$ ،
، $\text{س} = 0$ ،
، $\text{س} > 0$ ، $\pi \geq \text{س}$ ،

متصلاً على الفترة $[\pi - , \pi]$ ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب

$$(1) \left. \begin{array}{l} 5 + 3s^2 \\ 8s \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان ق} \quad , \quad \begin{array}{l} 1 > s \geq 2 \\ 1 \geq s \geq 2 \end{array}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة $[-2, 2]$.

$$(2) \text{ إذا كان ل} (s) = |10 - s^2|, \text{ فابحث في اتصال الاقتران ل على الفترة } [-10, 8].$$

$$(3) \left. \begin{array}{l} \frac{27 - s^2}{s - 3} \\ s + 5 \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان ع} \quad , \quad \begin{array}{l} s > 3 \\ s \leq 3 \end{array}$$

فابحث في اتصال الاقتران ع على ح.



JO ACADEMY.com

$$(4) \left. \begin{array}{l} \sqrt{s - 4} \\ |16 - s^2| \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان ل} \quad , \quad \begin{array}{l} s > 4 \\ s \leq 4 \end{array}$$

فابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله.

$$(5) \left. \begin{array}{l} 5 \\ 5 + [s] \\ 4 \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان ع} \quad , \quad \begin{array}{l} s = 3 \\ 3 > s > 4 \\ s = 4 \end{array}$$

فابحث في اتصال الاقتران ع على الفترة $[3, 4]$.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{s+1} \\ 0 \leq s < 3, \\ [0, 2.5 + s] \\ |s-9| \\ s = 6 \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان ق (6)}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة $[0, 6]$.

$$\left. \begin{array}{l} s \neq 2, \\ \frac{s^2 + 2(1-h)s - 4h}{2-s} \\ s = 2, \\ s + 5 \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان الاقتران ع (7)}$$

متصلاً على ح، فجد قيمة الثابت هـ.

$$\left. \begin{array}{l} s > 2, \\ 2 \leq s < 4, \\ s \leq 4, \\ [0, 5 + s] \\ \frac{5s}{36 - s^2} \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان ع (8)}$$

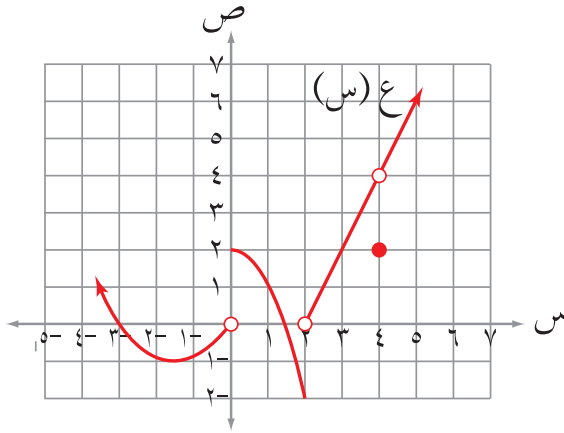
فابحث في اتصال الاقتران ع لجميع قيم س الحقيقية.

$$\left. \begin{array}{l} 0 < s \leq 1, \\ [s] + s \\ 2 \leq s \leq 3, \\ \sqrt{s} + \frac{3s^2}{5} \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان ق (9)}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة $[-1, 2]$.

(10) إذا كان ل (س) $\frac{s^2 + 5s + 2}{3 + s + s^2}$ ، فما قيم أ التي تجعل الاقتران ل متصلاً على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ؟

(١) معتمداً الشكل (١-٣٠)، الذي يمثل منحنى الاقتران ع، جد كلاً مما يأتي:



الشكل (١-٣٠)

أ () نهـاع (س) $\leftarrow_{س} +$

ب () نهـاع (س) $\leftarrow_{س} -$

ج () نهـاع (س) $\leftarrow_{س} ٣$

د () نهـاع (س) $\leftarrow_{س} ٤$

هـ () مجموعة قيم أ حيث نهـاع (س) غير موجودة.

و () مجموعة قيم ب حيث ع اقتران غير متصل عند $س = ب$.

(٢) إذا كانت نهـاق (س) $\leftarrow_{س} ق = ٤$ ، ق (٣) $= ٦$ ، فجد قيمة:

$$\text{نهـا} \leftarrow_{س} ق (٢ + س - (١ + س)^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} ٣ < س ، \quad \frac{س - ٣}{|٣ - س|} \\ ٣ \geq س ، \quad ٤ - ٢س \end{array} \right\} = (س) ق \text{ إذا كان } (س) ق$$

وكانت نهـاق (س) موجودة ، فما قيمة الثابت جـ؟

$$(٤) \text{ إذا كان } (س) ق = \frac{س^٢ + (١٣ + س) + أ}{س - ٢} ، \text{ فجد قيمة الثابت أ التي تجعل نهـاق (س) موجودة.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} < 0, \quad \frac{|5 - \text{س}^2 - \text{س}^4|}{|5 - \text{س}|} \\ \text{س} > 0, \quad \text{أجتا } \frac{\pi}{5} + 5 \end{array} \right\} = (5) \text{ إذا كان ق(س)}$$

وكانت نهيا ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

(٦) جد كلاً من النهايات الآتية:

$$\text{أ) نهيا } \frac{\text{س} - \text{جا س}}{\sqrt{1 - \text{جتا س}^2}} \quad \text{ب) نهيا } \frac{\text{س} + \text{جا س}^2}{\text{س}^3}$$

$$\text{ج) نهيا } \frac{1}{1 - \text{س}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} \right) \quad \text{د) نهيا } \frac{\text{س}^3 - \text{س}^2}{\text{س} - \sqrt{1 + \text{س}} - 1}$$

$$\text{هـ) نهيا } \frac{\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{3}}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3} \quad \text{و) نهيا } \frac{\sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س}}}{\text{س}^2 - 5\text{س} - 12}$$

$$\text{ز) نهيا } \frac{\text{س}^2 + \text{جا س}^2}{\text{س}^3} \quad \text{ح) نهيا } \frac{\text{جتا س} - \sqrt{3\text{جا س}}}{\pi - 6\text{س}}$$

$$\text{ط) نهيا } \frac{\text{جتا س}^3 - \text{جتا س}^5}{\text{س}^2} \quad \text{ي) نهيا } \frac{\frac{1}{2} - \text{جتا} \left(\frac{\pi}{3} + \text{هـ} \right)}{\text{هـ}}$$

$$(٧) \text{ إذا كانت نهيا } \frac{\text{س}^4 - \text{جا ب س}}{\text{ب س} - \text{ظا س}} = \frac{1}{4}, \text{ فجد قيمة الثابت ب.}$$

$$8) \left\{ \begin{array}{l} \frac{|s-2|}{2-s} \\ s \neq 2 \end{array} \right\} = (s) \text{ ق إذا كان } \left\{ \begin{array}{l} s \neq 2 \\ s = 2 \end{array} \right.$$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند $s = 2$

$$9) \left\{ \begin{array}{l} |1 - \frac{s}{4}| \\ [3+s, 5] \end{array} \right\} = (s) \text{ ع إذا كان } \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{s}{4} \geq 3 \\ 3 \geq s \geq 4 \end{array} \right.$$

فابحث في اتصال الاقتران ع عند $s = 3$

$$10) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-s^2}{2-s} \\ \frac{1}{3} > s > \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} = s \\ \frac{4}{3} > s > \frac{1}{3} \end{array} \right\} = (s) \text{ ل إذا كان } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-s^2}{2-s} \\ \frac{1}{3} > s > \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} = s \\ \frac{4}{3} > s > \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند $s = \frac{1}{3}$

11) ابحث في اتصال الاقتران ع $(s) = \sqrt{s + [s]}$ على الفترة $(1, 2]$.

$$12) \left\{ \begin{array}{l} s^3 \\ s^2 \sqrt{1-s} \end{array} \right\} = (s) \text{ ه إذا كان } \left\{ \begin{array}{l} s > 1 \\ s \leq 1 \end{array} \right.$$

فابحث في اتصال الاقتران ه لجميع قيم s الحقيقية.

$$(١٣) \left. \begin{array}{l} \frac{١-٢س}{١+س} \\ ١- > س \geq ٢- \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان ق} \\ \left. \begin{array}{l} ١ > س \geq ١- \\ [س]س \end{array} \right\}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة $[-٢, ١]$.

$$(١٤) \text{ إذا كان ل} (س) = \frac{١-٢س}{٢+س} \text{ ، هـ } (س) = [س] \text{ ، فابحث في اتصال الاقتران ل} \times \text{ هـ على الفترة } [٠, ٢]$$

(١٥) يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات، كل فقرة لها أربعة بدائل مختلفة، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح في ما يأتي:

(١) إذا كانت نهيا ق (س) = ٤ ، ق (٣) = ٦ ، فما قيمة نهيا ق (٢س + ١) - (س + ٧) ؟

(أ) ١٧ (ب) ١٣ (ج) ٢٢ (د) ٣٧

(٢) إذا كان ق اقتراناً متصلاً عند س = ٤ ، وكان ٣ ق (٤) = ٦ ، وكانت نهيا ق (س) = ٤ ب ،

فإن قيمة الثابت ب تساوي:

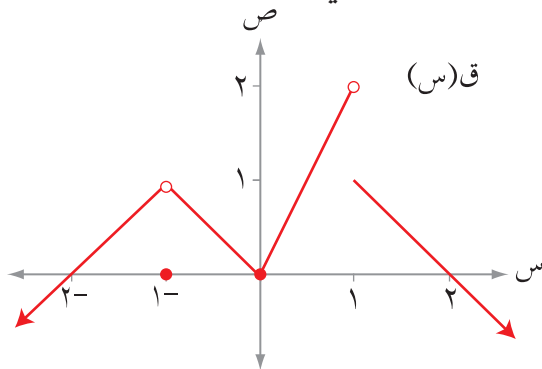
(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٢ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢-

(٣) إذا كان ق اقتراناً كثير حدود ، وكانت نهيا ق (س) = ٣ ، فإن نهيا ق (س) تساوي:

(أ) ٩ (ب) ١٨ (ج) ٦ (د) ٣٦

(٤) معتمداً الشكل (٣١-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد

الحقيقية ح، فإن مجموعة قيم $ق(س)$ حيث $ق(س) = ٠$ صفراً هي:



الشكل (٣١-١)

أ) $\{٠, ٢-\}$

ب) $\{٠\}$

ج) $\{٢, ٠\}$

د) $\{٢, ٠, ٢-\}$

(٥) نهيا $\frac{٢س - ٤}{س - ٢}$ تساوي:

د) ٣

ج) ٣-

ب) صفر

أ) ١-



(٦) نهيا $\frac{٦س٢ + ٨س٢}{٢س٢ - ٣س٣}$ تساوي:

د) ٩

ج) ٣

ب) ٢-

أ) ٦-

(٧) إذا كان ق اقتراناً متصلًا عند $س = ١$ ، وكان $ق(١) = ٤$ ، فإن

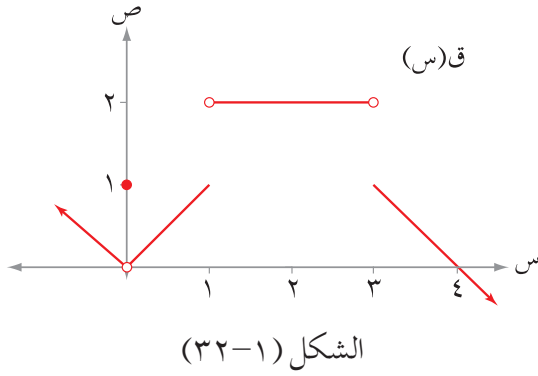
نهيا $\left(\frac{|١-س|}{١-س} + ق(س) \right)$ تساوي:

د) غير موجودة

ج) ٥

ب) ١

أ) ٣



(٨) معتمداً الشكل (٣٢-١) الذي يمثل

منحنى الاقتران ق المعروف على ح،

ما مجموعة قيم أ التي تجعل

نها ق(س) غير موجودة؟
س ← أ

(أ) {٣، ١، ٠} (ب) {٤، ٣، ١} (ج) {٤، ٣، ١، ٠} (د) {٣، ١}

$$(٩) \left. \begin{array}{l} \text{٢ جتا } \pi^2 \text{ ، } \pi/2 < s \\ \text{أ } \pi^2 + \pi^2 \text{ ، } \pi/2 \leq s \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان ل}$$

فإن قيمة أ التي تجعل الاقتران ل متصلاً عند س = $\pi/2$ هي: (أ) ٢- (ب) صفر (ج) ٤- (د) ٤

$$(١٠) \left. \begin{array}{l} 3 \text{ ، } s = 1 \\ 5 + [s] \text{ ، } 1 < s < 2 \\ 4 \text{ ، } s = 2 \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان ق(س)}$$

فإن الاقتران ق متصل على الفترة:

(أ) [٢، ١] (ب) (٢، ١) (ج) [٢، ١) (د) (٢، ١)

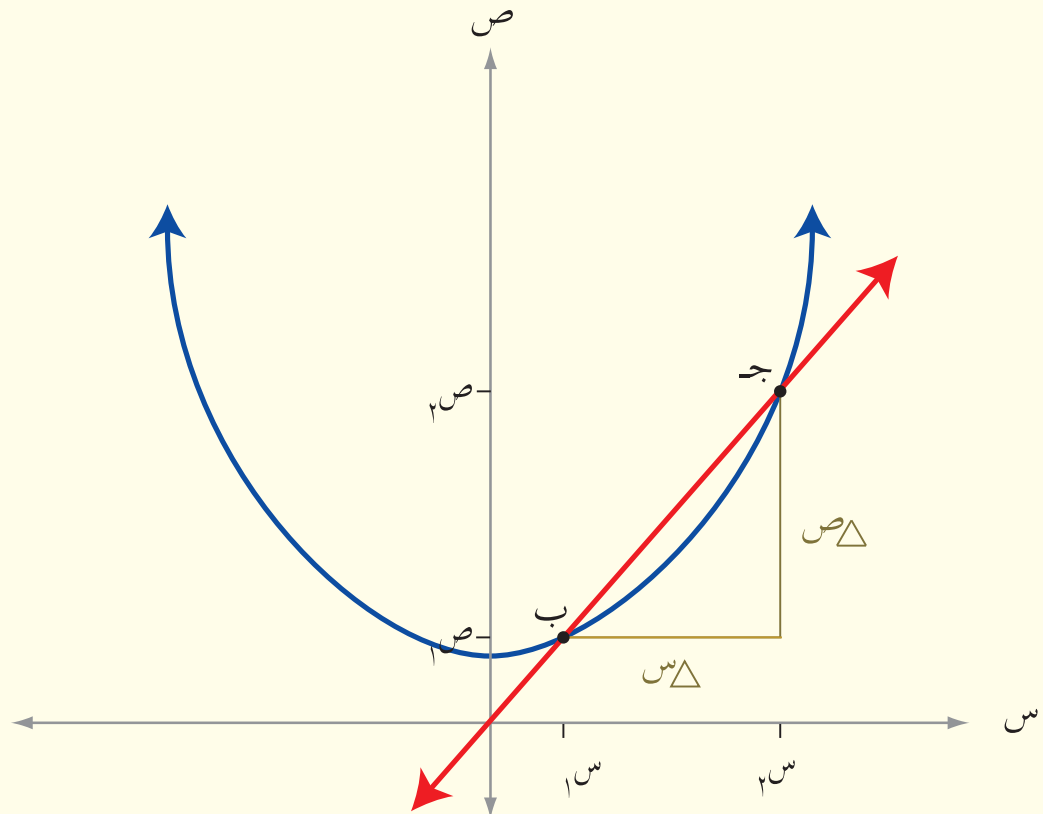


التفاضل

Differentiation

تتضمن بعض الظواهر في حياتنا تغيراً في كمياتها أو قياساتها بالنسبة لمتغير آخر، مثل سرعة صاروخ بالنسبة للزمن، أو قيمة العملة بالنسبة لعملة أخرى، أو حجم بالون كروي بالنسبة لطول نصف قطره ، ... إلخ، يُستخدم علم التفاضل في دراسة مثل هذه التغيرات.

تطور علم التفاضل عبر دراسة ثلاث مسائل رئيسية هي:
مسألة المماس و مسألة السرعة و مسألة القيم القصوى (الكبرى والصغرى).
و سنقدم في هذه الوحدة مفهوم المشتقة وقواعد إيجادها.



يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- وصف القاطع والمماس لمنحنى اقتران هندسيًا.
- إظهار فهم المشتقة وإيجادها باستخدام التعريف.
- وصف وحساب المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف بصيغ مختلفة.
- استخدام رموز مختلفة للتعبير عن المشتقة الأولى.
- التمييز بين الاتصال والقابلية للاشتقاق عند نقطة.
- تعليل عدم قابلية الاشتقاق.



JO | ACADEMY.com

معدل التغير والمشتقات

Rate of Change and Derivatives

الفصل الأول

النتائج

- تجد معدل التغير في فترة محددة.
- تفسر مفهوم معدل التغير هندسيًا، وفيزيائيًا.
- تتعرف المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة، وتُفسرها هندسيًا.
- تجد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف، وبصورتها العامة.
- تبحث في قابلية اشتقاق اقتران على فترة.
- تفسر العلاقة بين اتصال اقتران عند نقطة، وقابلية اشتقاقه عند هذه النقطة.
- تدرس قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة معينة مستعينا بالاتصال، وتفسر الحالات التي يكون فيها الاقتران غير قابل للاشتقاق عند نقطة.

Rate of Change

معدل التغير

أولاً

عند رمي حجر في بركة ماء راکدة تتكون دائرة يزداد طول قطرها بمرور الزمن . ما معدل الزيادة في مساحة الدائرة عندما يزداد طول قطرها من ٨ سم إلى ١٠ سم ؟

يُستعمل معدل التغير في مجالات كثيرة، مثل: دراسة تزايد عدد السكان ومعدلات الإنتاج، والسرعة والتسارع. وتُشكل دراسة حركة جُسيم يتحرك على خط مستقيم (أفقي أو عمودي)، وميل القاطع الواصل بين نقطتين على منحنى اقتران مسألتين مهمتين في استخدامات معدل التغير.

تعريف

إذا تغيرت قيمة متغير مثل s من s_1 إلى s_2 فإن مقدار التغير في s هو $s_2 - s_1$ ، وسنرمز للتغير في s بالرمز Δs (ويقرأ دلتا s).

مثال ١

جد Δs إذا تغيرت s من $2,3$ إلى $2,5$

الحل

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 2,5 - 2,3 = 0,2$$

تدريب ١

جد Δs في الحالات الآتية:

$$(1) s_1 = 4, s_2 = 3,7$$

$$(2) \text{ إذا تغيرت } s \text{ من } s_1 = n \text{ إلى } s_2 = n + 1$$

تعريف

مقدار التغير في الاقتران

إذا كان $v = q(s)$ اقتراناً معرفاً على الفترة $[a, b]$ وتغيرت s من s_1 إلى s_2 فإن v ستتغير تبعاً لذلك من قيمة v_1 إلى قيمة v_2 ، حيث $v_1 = q(s_1)$ ، $v_2 = q(s_2)$.

يُرمز لمقدار التغير في قيمة الاقتران q بالرمز

$$\Delta v = v_2 - v_1 = q(s_2) - q(s_1) = \Delta q(s)$$

مثال ٢

إذا كان $v = q(s) = s^2 - 4s + 1$ ، فجد مقدار التغير في الاقتران q في الحالات الآتية :

$$(1) \text{ إذا تغيرت } s \text{ من } 1 \text{ إلى } 3$$

$$(2) \text{ إذا تغيرت } s \text{ من } s_1 = n \text{ إلى } s_2 = n - 1$$

الحل

$$\Delta \text{ ص} = \text{ص}_2 - \text{ص}_1$$

$$= \text{ق}(3) - \text{ق}(1) = (3 - 2 \times 4 + 1) - (1 + 4 - 1) =$$

$$= (2 -) - (2 -) = \text{صفرًا}$$

$$\Delta \text{ ص} = \text{ق}(1 - \text{ن}) - \text{ق}(\text{ن})$$

$$= (1 - \text{ن}) - (1 + (1 - \text{ن}) \times 4 - 2) =$$

$$= 1 - \text{ن} - 1 - 4 + 4\text{ن} + 2 = 3\text{ن} - 5$$

تعريف

إذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ ، $\text{س}_1 \neq \text{س}_2$ فإنَّ المقدار $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ يُسمى معدل التغير في ص عندما تتغير

س من س_1 إلى س_2 حيث:

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

حيث $\text{س}_2 = \text{س}_1 + \Delta \text{س}$

مثال ٣

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3 - \text{س}$ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من -1 إلى 2

الحل

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(2) - \text{ق}(-1)}{2 - (-1)} = \frac{8 - 1}{3} = \frac{7}{3}$$

تدريب ٢

إذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = 5 - \text{س}^2$ ، جد معدل التغير في الاقتران ق إذا تغيرت س من 2 إلى 1 و 2 .

مثال ٤

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |2\text{س} - 6|$ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق في الفترة $[1, 4]$.

الحل

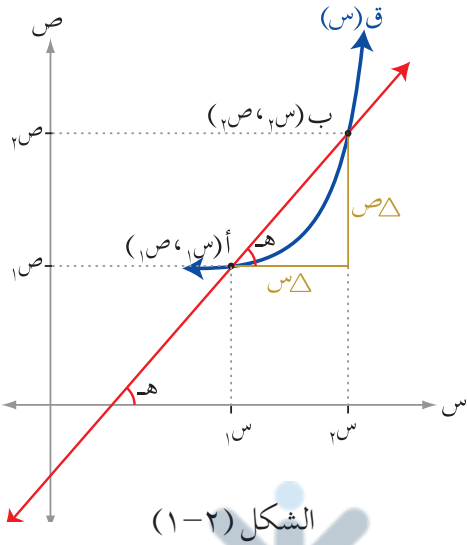
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} - 6 & , 2\text{س} - 6 \geq 0 \\ 6 - 2\text{س} & , 2\text{س} - 6 < 0 \end{cases}$$

$$\text{س}_1 = 1, \text{س}_2 = 4$$

$$\therefore \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{q(4) - q(1)}{1 - 4} = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$$

تدريب ٣

إذا كان $q(s) = \left[1 - \frac{1}{4}s\right]$ فجد معدل التغير في الاقتران q في الفترة $[3, 5]$.



التفسير الهندسي لمعدل التغير

يمثل الشكل (٢-١) منحنى الاقتران q .

النقطتان $A(s_1, v_1)$ ، $B(s_2, v_2)$ واقعتان عليه.

يسمى المستقيم الواصل بين النقطتين A ، B قاطعاً لمنحنى الاقتران q .

تعريف ميل المستقيم إذا عُلمت نقطتان عليه

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{AB} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} = \frac{q(s_2) - q(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{\Delta v}{\Delta s} = \text{ظا } \theta$$

العلاقة بين ميل المستقيم وزاوية ميله

حيث θ زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ (وهي الزاوية المحصورة بين $\overleftrightarrow{AB}$ والاتجاه الموجب لمحور السينات). أي أن:

ميل القاطع = معدل التغير = ظا θ

مثال ٥

جد ميل القاطع الواصل بين النقطتين $(2, q(2))$ ، $(5, q(5))$ الواقعتين على منحنى الاقتران q حيث $q(s) = s^3 - s^2$.

الحل

ميل القاطع = معدل تغير الاقتران q في الفترة $[2, 5]$

$$= \frac{q(5) - q(2)}{5 - 2} = \frac{(5^3 - 5^2) - (2^3 - 2^2)}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

تدريب ٤

إذا كان القاطع المارّ بالنقطتين (١ ، ق(١)) ، (٣ ، ق(٣)) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فجد معدل تغير الاقتران ق في الفترة [١ ، ٣].

التفسير الفيزيائي لمعدل التغير

في دراسة حركة جسيم يتحرك على خط مستقيم أفقي أو عمودي غالباً ما يُستخدم محور أفقي مع نقطة أصل عليه بوصفه نموذجاً للمستقيم الذي يتحرك عليه الجسيم. في هذه الحالة يُعتبر التحرك في الاتجاه الموجب إذا كان من اليسار إلى اليمين، وفي الاتجاه السالب إذا كان من اليمين إلى اليسار. على فرض أن جسيماً يتحرك على خط مستقيم بحيث كان موقعه من نقطة الأصل في أية لحظة ن معرفاً بالقاعدة ف(ن)، إذا تغيرت ن من n_1 إلى n_2 فإن موقع الجسيم سيتغير من الموقع ف(ن_١) إلى الموقع ف(ن_٢). إذا قطع الجسيم خلال الفترة الزمنية $[n_1, n_2]$ مسافة Δ ف فإن النسبة :

$$\frac{\Delta f}{\Delta n} = \frac{f(n_2) - f(n_1)}{n_2 - n_1} = \frac{f(n_1 + \Delta n) - f(n_1)}{\Delta n} , \Delta n > 0$$

تُسمى **السرعة المتوسطة** للجسيم في الفترة الزمنية $[n_1, n_2]$ ويُرمز لها بالرمز $\bar{c}$ ، أي أن $\bar{c} = \frac{\Delta f}{\Delta n}$

تعريف

السرعة المتوسطة ($\bar{c}$) لجسيم يتحرك على خط مستقيم في الفترة الزمنية $[n_1, n_2]$ هي معدل التغير في اقتران المسافة ف(ن) وبالرموز:

$$\bar{c} = \frac{\Delta f}{\Delta n} = \frac{f(n_2) - f(n_1)}{n_2 - n_1} = \frac{f(n_1 + \Delta n) - f(n_1)}{\Delta n} , \Delta n > 0$$

مثال ٦

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = $n^2 - n$ حيث ن الزمن بالثواني ،

ف(ن) المسافة بالأمتار ، أجب عن السؤالين الآتيين:

(١) هل سرعة الجسيم ثابتة أم متغيرة ؟ برّر إجابتك.

(٢) احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥] .

الحل

(١) المسافة المقطوعة بين $n=1$ ، $n=2$: هي $f(2) - f(1) = 0 - 2 = -2$ م
 المسافة المقطوعة بين $n=2$ ، $n=3$: هي $f(3) - f(2) = 6 - 2 = 4$ م
 السرعة متغيرة؛ لأن المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[1, 2]$ تختلف عنها في الفترة الزمنية $[2, 3]$

$$(2) \bar{c} = \frac{\Delta f}{\Delta n} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 2}{1} = -2 \text{ م/ث}$$

تدريب ٥

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $f(n) = 3n^2 - 4n + 20$ ؛ حيث f بُعد الجسيم بالأمتار عن نقطة ثابتة (و)، n الزمن بالثواني، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية $[1, 4]$.

مثال ٧

إذا كان معدل التغير في الاقتران q في الفترة $[1, 6]$ يساوي ١٢، وكان $h(3) - h(2) = 3$ ، فجد معدل التغير في الاقتران h في الفترة $[1, 6]$.

الحل

$$\begin{aligned} 12 &= \frac{q(6) - q(1)}{6 - 1} \\ \frac{(h(6) - h(1)) - (3 - 2)}{6 - 1} &= \frac{h(6) - h(1)}{6 - 1} = \frac{\Delta h}{\Delta s} \\ \left(\frac{q(6) - q(1)}{6 - 1} \right) 3 - \frac{3 - 2}{6 - 1} &= \frac{h(6) - h(1)}{6 - 1} \\ 34 - 1 &= h(6) - h(1) = 12 \times 3 - 1 = 35 \end{aligned}$$

تدريب ٦

إذا كان معدل التغير في الاقتران q في الفترة $[1, 4]$ يساوي ٦، وكان $h(3) - h(2) = 3$ ، فجد معدل التغير في الاقتران h في الفترة $[1, 4]$.

(١) إذا كان $ق(س) = س^2 - س$ ، فجد مقدار التغير في قيمة الاقتران $ق$ إذا تغيرت $س$ من :

أ (٣ إلى ٤) ب ($س_١ = ٢$ إلى $س_٢ = ٢ + هـ$)

(٢) إذا كان $ق(س) = س^2 - ٣$ ، فجد معدل التغير في الاقتران $ق$ عندما تتغير $س$ من (١) إلى (١ + هـ).

(٣) تحرك جسيم في المستوى الإحداثي على خط مستقيم من النقطة أ (س ، ص) إلى النقطة

ب (٢ ، ٥). إذا كانت $\Delta س = ١,٠$ ، $\Delta ص = ٦,٠$ فجد إحداثيي النقطة أ.

(٤) صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها، إذا زاد طول ضلعها من ٦ سم إلى ١,٦ سم، فجد معدل تغير مساحة الصفيحة.

(٥) إذا كان معدل التغير في الاقتران $ق$ على الفترة $[١ - , ٢]$ يساوي ٥ ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ (س) = $٤ س^٢ - ٣ ق(س)$ على الفترة نفسها.

(٦) قُذف جسم رأسياً للأعلى بحيث يكون بُعده (ف) بالأمتار عن سطح الأرض بعد (ن) ثانية معطىً بالعلاقة $ف(ن) = ٦٠ ن - ٥ ن^٢$ جد:

أ (السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية $[٢ , ٥]$.

ب) السرعة المتوسطة للجسم بدلالة $\Delta ن$ ؛ إذا تغيرت $ن$ من صفر إلى $\Delta ن$.

(٧) إذا كان معدل التغير في الاقتران $ق$ على الفترة $[١ , ٤]$ يساوي ٣ ، وكان $ق(١) + ق(٤) = ٢$ ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ (س) = $ق(س)^٢$ على الفترة $[١ , ٤]$.

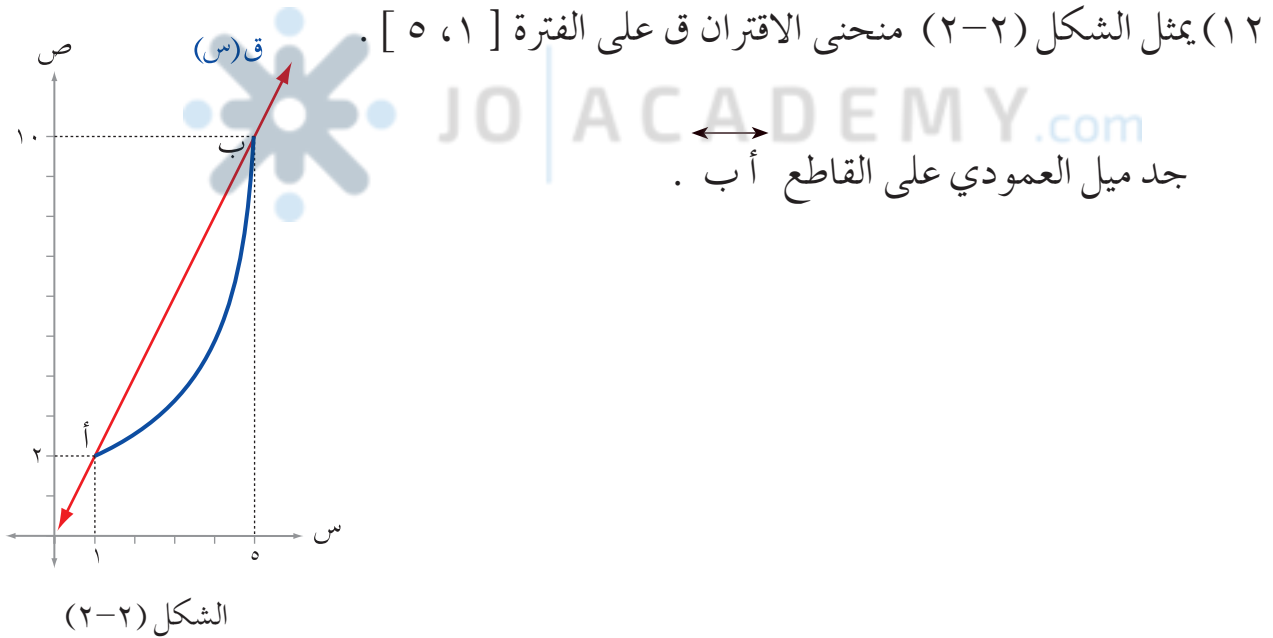
(٨) إذا كان معدل التغير في الاقتران $ق$ على الفترة $[٢ , ٥]$ يساوي ٧ ، و كان معدل تغيره على الفترة $[٥ , ٩]$ يساوي ١٤ ، فجد معدل التغير في الاقتران $ق$ على الفترة $[٢ , ٩]$.

٩ (إذا كان القاطع المارّ بالنقطتين (١ ، ق(١) ، (٢ ، ٤) الواقعتين على منحنى الاقتران ق يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فجد ق(١).

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq 0, \quad |3 - s^2| \\ 6 \geq 2, \quad [1 + s] \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان ق(س)}$$

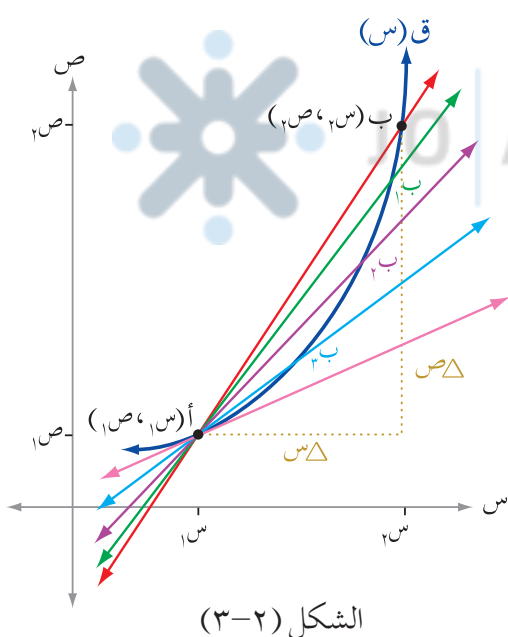
فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى ٤ .

١١ (إذا كان ق(س) = (س^٢ + س^{-١}) ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى س_٢ يساوي (- $\frac{1}{3}$) ، فجد قيمة س_٢ حيث س_٢ < ٠



إذا كان $v = s + b$ ، فجد نهجاً $\frac{\Delta v}{\Delta s}$ ، وحدد علاقة هذه النهاية بميل هذا المستقيم.

تعلمت سابقاً معدل التغير لاقتران معطى وتفسيره الهندسي والفيزيائي. في هذا الدرس سوف تستخدم النهايات ومعدل التغير لإيجاد المشتقة q للاقتران q ، وسيظهر لك أن $q(s_1)$ تمثل ميل المماس لمنحنى $v = q(s)$ عند النقطة $(s_1, q(s_1))$ ، وإذا كان $v = q(s)$ يمثل اقتران مسافة لجسم يتحرك على خط مستقيم فإن $q(s_1)$ يصف السرعة اللحظية للجسم عند الزمن s_1 .



في الشكل (٣-٢) إذا تحركت النقطة b على منحنى الاقتران q مقتربة من النقطة a ، فإنك تلاحظ أن s_2 تقترب من s_1 ، وأن Δs تصغر شيئاً فشيئاً، وتبعاً لذلك يأخذ القاطع (ab) أشكالاً مختلفة $\overleftrightarrow{ab_1}$ ، $\overleftrightarrow{ab_2}$ ، $\overleftrightarrow{ab_3}$ ،... وتتغير Δv .

عندما تؤول Δs إلى الصفر (أي تقترب إلى القيمة صفر) يؤول القاطع (ab) إلى مماس لمنحنى الاقتران q عند النقطة a (تنطبق b على a)، أي يؤول ميل القاطع إلى ميل المماس عند النقطة $a(s_1, v_1)$. في هذه الحالة يصبح ميل المماس لمنحنى q عند النقطة $a(s_1, v_1)$ يساوي نهجاً $\frac{\Delta v}{\Delta s}$ إن وجدت.

يُسمى المقدار نهـبا $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ معدل التغير في ص بالنسبة إلى س أو المشتقة الأولى للاقتران ق عند $\Delta \text{س} \rightarrow 0$.

النقطة (س، ق(س)) ويُرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\text{ق(س)} \text{ أو } \text{ص} \quad \text{أو} \quad \left| \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \right|_{\text{س} = \text{س}_1}$$

$$\text{أي أن } \text{ق(س)} = \text{نهـبا} = \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(س}_2\text{)}}{\text{س} - \text{س}_2} = \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(س}_1\text{)}}{\Delta \text{س}} \quad \text{نهـبا} = \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(س}_1\text{)}}{\Delta \text{س}}$$

تعريف

إذا كان $\text{ص} = \text{ق(س)}$ اقتراناً معرفاً على فترة مفتوحة تحتوي س_1 ، وكانت نهـبا $\frac{\text{ق(س)} - \text{ق(س}_1\text{)}}{\text{س} - \text{س}_1}$ موجودة، فإن هذه النهاية تُسمى المشتقة الأولى للاقتران

ق عند $\text{س} = \text{س}_1$.
ويُرمز لها بالرمز ق(س) أو $\left| \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \right|_{\text{س} = \text{س}_1}$

ويكون ق(س) هو ميل المماس لمنحنى ق عند س_1 .

لاحظ أنه تم استخدام هـ بدلاً من $\Delta \text{س}$ للتبسيط.

إذا كانت النهاية موجودة فنقول إن **ق قابل للاشتقاق عند س_1** ، أو يوجد لمنحنى الاقتران ق مماس عند س_1 .

أما إذا كانت النهاية غير موجودة فنقول إن ق(س) غير موجودة أي إن **ق غير قابل للاشتقاق عند س_1** .

مثال ١

إذا كان ق(س) = س^٢ + ٣ ، فجد ، ق(١) .

الحل

$$\begin{aligned} \text{ق(١)} &= \text{نهيا} \frac{\text{ق(١+هـ)} - \text{ق(١)}}{\text{هـ}} = \text{نهيا} \frac{\text{ق(١+هـ)} - \text{ق(١)}}{\text{هـ}} \\ &= \text{نهيا} \frac{١ + \text{هـ}^٢ + ٣ - ١}{\text{هـ}} = \text{نهيا} \frac{\text{هـ}^٢ + ٣}{\text{هـ}} \\ &= \text{نهيا} \frac{\text{هـ}^٢ + ٣}{\text{هـ}} = \text{نهيا} \frac{\text{هـ}^٢ + ٣}{\text{هـ}} \end{aligned}$$

لاحظ أنَّ ق(١) = ٢ تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (١ ، ٤) .

مثال ٢

إذا كان ق(٢) = ٩ ، فجد نهيا $\frac{\text{ق(٢+هـ)} - \text{ق(٢)}}{\text{هـ}}$.

الحل

بفرض أنَّ ٤هـ = م $\Leftrightarrow$ هـ = $\frac{م}{٤}$

عندما هـ $\leftarrow$ ، فإنَّ م $\leftarrow$.

$$\therefore \text{نهيا} \frac{\text{ق(٢+هـ)} - \text{ق(٢)}}{\text{هـ}} = \text{نهيا} \frac{\text{ق(٢+م)} - \text{ق(٢)}}{\frac{م}{٤} \times ٦}$$

$$= \frac{٢}{٣} \text{نهيا} \frac{\text{ق(٢+م)} - \text{ق(٢)}}{\text{م}}$$

$$= \frac{٢}{٣} \text{ق(٢)} = \frac{٢}{٣} \times ٩ = ٦$$

تدريب ١

أجب عن كلِّ مما يأتي :

(١) إذا كان ق(س) = س^٣ + ٢س ، فجد ق(- ١) .

(٢) إذا كان ق(٠) = ٦ ، فجد نهيا $\frac{\text{ق(٠+هـ)} - \text{ق(٠)}}{\text{هـ}}$.

في تعريف المشتقة، إذا استخدمت الرمز s بدلاً من الرمز $s_1 + h$ (أي أن $s = s_1 + h$) فإنَّ
 $h = s - s_1$
 وإنَّ $s \leftarrow s_1$ عندما $h = 0$ ويكون

$$q(s_1) = \frac{q(s_1 + h) - q(s_1)}{h} = \frac{q(s) - q(s_1)}{s - s_1} \text{ نهـا }_{s \leftarrow s_1}$$

وعليه؛ يمكن التوصل إلى الصورة الآتية لمشتقة q عند s_1 :

تعميم

$$q(s_1) = \frac{q(s) - q(s_1)}{s - s_1} \text{ نهـا }_{s \leftarrow s_1}$$

مثال ٣

إذا كان $q(s) = \sqrt{s+1}$ ، فجد $q'(3)$.

الحل

$$q'(3) = \frac{q(3) - q(s)}{3 - s} \text{ نهـا }_{s \leftarrow 3} = \frac{q(3) - q(s)}{3 - s} \text{ نهـا }_{s \leftarrow 3}$$

$$= \frac{q(3) - q(s)}{3 - s} \times \frac{\sqrt{s+1} + \sqrt{3+1}}{\sqrt{s+1} + \sqrt{3+1}} = \frac{(3 - s)(\sqrt{s+1} + \sqrt{3+1})}{(3 - s)(\sqrt{s+1} + \sqrt{3+1})} \text{ نهـا }_{s \leftarrow 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s+1} + \sqrt{3+1}} \text{ نهـا }_{s \leftarrow 3} = \frac{1}{4}$$

تدريب ٢

إذا كان $v = q(s) = \frac{s}{s+1}$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عند $s = 2$

مثال ٤

إذا كان $q(s) = |s-1|$ فجد $q'(s)$ عند كلٍّ من القيم الآتية:

$$(1) s = 3 \quad (2) s = 0$$

الحل

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq s, \\ 1 - s \end{array} \right\} = |1 - s| = (s) \text{ ق (س) } \quad \text{لماذا؟}$$

$$(1) \text{ ق (3)} = \text{نهيا} \frac{\text{ق (س) - ق (3)}}{s - 3} = \text{نهيا} \frac{s - 1 - 3}{s - 3} = 1$$

$$(2) \text{ ق (0)} = \text{نهيا} \frac{\text{ق (س) - ق (0)}}{s} = \text{نهيا} \frac{s - 1}{s} = 1 - \frac{1}{s}$$

تعريف

ليكن الاقتران ق معرفاً عند العدد س = أ :

(1) إذا كانت ق₊ (أ) = نهيا₊ $\frac{\text{ق (س) - ق (أ)}}{s - أ}$ موجودة ، فإن ق₊ (أ) تُسمى المشتقة الأولى للاقتران ق من اليمين عند س = أ .

(2) إذا كانت ق₋ (أ) = نهيا₋ $\frac{\text{ق (س) - ق (أ)}}{s - أ}$ موجودة ، فإن ق₋ (أ) تُسمى المشتقة الأولى للاقتران ق من اليسار عند س = أ .

(3) إذا كانت ق₋ (أ) = ق₊ (أ) = ل ، فإن ق (أ) موجودة وتساوي ل ، وبخلاف ذلك ، فإن ق (أ) غير موجودة أو ق (س) غير قابل للاشتقاق عند س = أ .

مثال ٥

$$\left. \begin{array}{l} s^2, \\ s \leq 3 \end{array} \right\} \text{ إذا كان ق (س) } = \left. \begin{array}{l} 6s - 9, \\ s > 3 \end{array} \right\}$$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = 3 .

الحل

لاحظ أن قاعدة الاقتران ق تتفرع عند س = 3 ؛ لذا يجب إيجاد ق₋ (3) ، ق₊ (3)

$$\text{ق₋ (3)} = \text{نهيا} \frac{\text{ق (س) - ق (3)}}{s - 3} = \text{نهيا} \frac{s^2 - 9}{s - 3} = \text{نهيا} \frac{s - 9}{s - 3}$$

$$= \text{نهيا} \frac{6(s - 3)}{s - 3} = 6$$

$$\begin{aligned} \text{ق}^+ (3) = \text{نهيا} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(3)}{س - 3} &= \text{نهيا} \frac{س^2 - 9}{س - 3} \\ &= \text{نهيا} \frac{(س+3)(س-3)}{س - 3} = (س+3) \text{نهيا} \\ 6 = \text{ق}^+ (3) &= \text{ق}^+ (3) \end{aligned}$$

بما أن $\text{ق}^- (3) = \text{ق}^+ (3) = 6$

∴ $\text{ق}^+ (3) = 6$ ، أي أن الاقتران ق قابل للاشتقاق عند $س = 3$

تدريب ٣

$$\left. \begin{aligned} 1 < س \leq 3- & , \quad 1 + س^4 \\ 5 \geq س \geq 1 & , \quad 3 + س^2 \end{aligned} \right\} = \text{ق}(س) \text{ إذا كان كان}$$

جد $\text{ق}^+ (1)$ ، $\text{ق}^- (1)$ إن وجدت.

في كثير من الأحيان تحتاج دراسة مشتقة الاقتران عند أي نقطة في مجاله ، أي دراسة المشتقة الأولى كاقتران في $س$. لإيجاد هذا الاقتران ، ضع الرمز $س$ بدلاً من الرمز $س$ في تعريف المشتقة.

تعميم

$$\text{ق}^+ (س) = \text{نهيا} \frac{\text{ق}(س+هـ) - \text{ق}(س)}{هـ} \dots\dots\dots (1)$$

وإذا استبدلت $ع$ بـ $(س+هـ)$ ، أي أن $ع = س + هـ$ فإن $هـ = ع - س$.
عندما $هـ \rightarrow 0$ فإن $ع \rightarrow س$. تصبح المعادلة (1) على الصورة الآتية:

تعميم

$$\text{ق}^+ (س) = \text{نهيا} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(س)}{ع - س} \dots\dots\dots (2)$$

يمكنك إيجاد $\text{ق}^+ (س)$ باستخدام إحدى الصورتين (1) ، (2).

تعميم

إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة $[أ ، ب]$ ، فإن $\text{ق}^+ (أ)$ ، $\text{ق}^- (ب)$ غير موجودتين؛ لأن ق غير معرف على يسار العدد $أ$ ، وغير معرف على يمين العدد $ب$.

مثال ٦

إذا كان ق(س) = ١ - س^٢، س ∈ [١، ٤]، فجد كلاً مما يأتي:

$$(١) \text{ ق(س) } \quad (٢) \text{ ق(٣) } \quad (٣) \text{ ق(}\frac{٣}{٢}\text{)}$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{ق(س)} &= \text{نهيا} \frac{\text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}} = \text{نهيا} \frac{١ - (\text{س+هـ})^٢ - (١ - \text{س}^٢)}{\text{هـ}} \\ &= \text{نهيا} \frac{١ - \text{س}^٢ - ٢\text{س هـ} - \text{هـ}^٢ + ١ - ١ + \text{س}^٢}{\text{هـ}} = \text{نهيا} \frac{-٢\text{س هـ} - \text{هـ}^٢}{\text{هـ}} = -٢\text{س} - \text{هـ} \end{aligned}$$

∴ ق(س) = -٢س - هـ لجميع قيم س ∈ (١، ٤) (الفترة مفتوحة، لماذا؟)

$$(٢) \text{ ق(٣) } = -٢ \times ٣ - ١ = -٦$$

$$(٣) \text{ ق(}\frac{٣}{٢}\text{)} = -٢ \times \frac{٣}{٢} - \frac{٣}{٢} = -٣$$

يمكن إيجاد ق(س)، س ∈ (١، ٤) في الفرع (١) بالطريقة الآتية:

$$\begin{aligned} \text{ق(س)} &= \text{نهيا} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع-س}} = \text{نهيا} \frac{١ - \text{ع}^٢ - (١ - \text{س}^٢)}{\text{ع-س}} \\ &= \text{نهيا} \frac{\text{س}^٢ - \text{ع}^٢}{\text{ع-س}} = \text{نهيا} \frac{(\text{س-ع})(\text{س+ع})}{\text{ع-س}} = -(\text{س+ع}) \end{aligned}$$

مثال ٧

إذا كان ق(س) = س^٣ - ٣س^٢ + س، س ∈ ح فجد ق(س) باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$$\begin{aligned} \text{ق(س)} &= \text{نهيا} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع-س}} = \text{نهيا} \frac{\text{ع}^٣ - ٣\text{ع}^٢ + \text{ع} - (\text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢ + \text{س})}{\text{ع-س}} \\ &= \text{نهيا} \frac{\text{ع}^٣ - ٣\text{ع}^٢ + \text{ع} - \text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{ع-س}} = \text{نهيا} \frac{(\text{ع}^٣ - \text{س}^٣) - ٣(\text{ع}^٢ - \text{س}^٢) + (\text{ع} - \text{س})}{\text{ع-س}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{نها} \leftarrow \text{ع}}{\text{ع} - \text{س}} - \frac{(\text{ع} + \text{س} + \text{س}^2)(\text{ع} - \text{س})}{\text{ع} - \text{س}} - \frac{3 \text{نها} \leftarrow \text{ع}}{\text{ع} - \text{س}} + 1$$

$$= 3 \text{س}^2 - 6 \text{س} + 1$$

تدريب ٤

إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 8}$ فجد ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة.

مثال ٨

أثبت أن معدل تغير مساحة الدائرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها (عند أي قيمة) يساوي محيط الدائرة.

البرهان

معدل تغير اقتران عند نقطة هو مشتقة الاقتران عند تلك النقطة، كما تعلمت في بداية هذا الدرس. بفرض أن طول نصف قطر الدائرة س والمساحة م، فتكون م(س) = $\pi \text{س}^2$.

والمطلوب إثبات أن م'(س) = $2\pi \text{س}$

$$\text{م}'(س) = \frac{\text{نها} \leftarrow \text{ع}}{\text{ع} - \text{س}} = \frac{\text{م}(س) - \text{م}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}} = \frac{\pi \text{س}^2 - \pi \text{ع}^2}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \frac{\pi (\text{س}^2 - \text{ع}^2)}{\text{ع} - \text{س}} = \frac{\pi (\text{س} + \text{ع})(\text{س} - \text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \pi (\text{س} + \text{ع}) \text{نها} \leftarrow \text{ع} = 2\pi \text{س} \text{ وحدة طول.}$$

تدريب ٥

صفحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام محافظة على شكلها. جد معدل التغير في مساحة هذه الصفحة بالنسبة إلى طولها، عندما يكون طولها ٢٠ سم.

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فأثبت أن:

$$\text{نهـ} \leftarrow \text{ق} = \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}^2) - \text{ق}(\text{س} - \text{هـ}^2)}{\text{هـ}} = \text{ق}(\text{س})$$

البرهان

ب طرح وإضافة ق(س) في البسط

$$\text{نهـ} \leftarrow \text{ق} = \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}^2) - \text{ق}(\text{س} - \text{هـ}^2)}{\text{هـ}} = \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}^2) - \text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س} - \text{هـ}^2)}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}^2) - \text{ق}(\text{س} - \text{هـ}^2)}{\text{هـ}} + \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{بفرض ل} = \text{هـ}^2 ، \text{فإن} \frac{\text{ل}}{\text{هـ}} = \text{هـ} \\ \text{وأن ل} \leftarrow \text{هـ}^2 ، \text{عندما} \text{هـ} \leftarrow \text{و} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \text{بفرض و} = -\text{هـ}^2 ، \text{فإن} \frac{\text{و}}{\text{هـ}} = -\text{هـ} \\ \text{وأن و} \leftarrow -\text{هـ}^2 ، \text{عندما} \text{هـ} \leftarrow \text{و} \end{array} \right|$$

$$= \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{ل}) - \text{ق}(\text{س})}{\frac{\text{ل}}{\text{هـ}}} + \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س} + \text{و})}{\frac{\text{و}}{\text{هـ}}}$$

$$= \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{ل}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ل}} + \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{و}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{و}}$$

$$= \text{ق}^2(\text{س}) + \text{ق}^2(\text{س}) = \text{ق}^2(\text{س})$$

تمارين ومسائل

(١) استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات الآتية عند قيمة (قيم) س المبينة إزاء كل منها:

أ (ق(س) = ٨ - ٥س ، س = ٣

ب (م(س) = ٣س + ٢س ، س = ١ -

ج (ل(س) = $\sqrt{١ - س}$ ، حيث س ≤ ١ ، س = ٥

د (ع(س) = $\left. \begin{array}{l} س^٢ - س \\ ٩ - ٥س \end{array} \right\}$ ، $٣ \geq س \geq ٠$ ، $٦ \geq س > ٣$

عند س = ٠ ، س = ٣ ، س = ٦

هـ (ك(س) = $|س^٢ - ٤|$ ، س = ١ ، س = ٢ ،
و (ص = $\frac{س^٢}{س + ٣}$ ، س = ١ -

(٢) جد $\frac{ص}{س}$ لكل من الاقترانات الآتية مستخدماً تعريف المشتقة:

أ (ص = $س^٢ - \frac{٤}{س}$ ، س $\neq ٠$ ، ب (ص = $\sqrt{٦ - س}$ ، س < ٣

ج (ص = $س^٣$ ، د (ص = $\sqrt[٣]{س}$

(٣) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فأثبت أن:

أ (نهـا $\frac{ق(س+هـ) - ق(س-هـ)}{هـ} = ٢ ق(س)$

ب (نهـا $\frac{ع ق(س) - س ق(ع)}{ع - س} = ق(س) - س ق(س)$

$$\text{ج) نهـا} \leftarrow \text{ع} \quad \frac{3\text{ع} - 3\text{س}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}} = 3\text{س}(\text{س}) + 3\text{س}(\text{ق})\text{س}$$

$$\text{د) إذا كان ق(5) = 6 فجد نهـا} \leftarrow \text{هـ} \quad \frac{\text{ق}(5 - 2\text{هـ}) - \text{ق}(5 + 4\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

هـ) إذا كان ق(س) = (س - أ) ل(س)، حيث ل(س) اقتران متصل عند س = أ، أ ثابت، فبين باستخدام تعريف المشتقة أن ق(أ) = ل(أ).

٦) أنبوب من المعدن أسطواني الشكل يزيد ارتفاعه عن طول نصف قطر قاعدته بمقدار وحدتين، سُخِّن الأنبوب بالحرارة فبدأ بالتمدد محافظاً على شكله، جد معدل تغير مساحته الجانبية بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدته؛ عندما يكون طول نصف قطر قاعدته ٦ سم.

٧) إذا كان مقدار التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي (٦ س^٢ هـ + ٦ س هـ^٢ + ٢ هـ^٣)، حيث: هـ عدد حقيقي يقترب من الصفر، فجد ق(٢-).

٨) مكعب معدني يتمدد بانتظام محافظاً على شكله، جد معدل تغير حجم المكعب بالنسبة إلى طول ضلعه، عندما يكون طول ضلعه وحدتي طول.

٩) أثبت أن معدل تغير حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها (عند أية قيمة)، يساوي مساحة سطحها.

إذا كان $q(s) = |s - 1|$ ، فأجب عما يأتي:

(١) ابحث في اتصال الاقتران q عند $s = 1$.

(٢) ابحث في قابلية الاقتران q للاشتقاق عند $s = 1$.

(١) للبحث في اتصال الاقتران q عند $s = 1$ يجب إيجاد النهاية عن يمين العدد ١ وعن يساره، لماذا؟

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} q(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (s - 1) = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} q(s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} (1 - s) = 0$$

$$\text{ومنه } \lim_{s \rightarrow 1} q(s) = 0$$

$$q(1) = 0$$

∴ q متصل عند $s = 1$ لأن $\lim_{s \rightarrow 1} q(s) = q(1)$

(٢) وللبحث في قابلية الاقتران q للاشتقاق عند $s = 1$ ، لا بد من إيجاد $q'_-(1) = q'_+(1)$ ، لماذا؟

$$q'_+(1) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{q(s) - q(1)}{s - 1} = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{(s - 1) - 0}{s - 1} = 1$$

$$q'_-(1) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{q(s) - q(1)}{s - 1} = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{(1 - s) - 0}{s - 1} = -1$$

∴ $q'_-(1) \neq q'_+(1)$ لأن $q'_-(1) \neq q'_+(1)$ غير موجودة

لاحظ في المسألة السابقة أن الاقتران q متصل عند النقطة $(1, q(1))$ ، لكنه غير قابل للاشتقاق عند هذه النقطة.

والآن، إذا كان اقتران ما قابلاً للاشتقاق عند $s = s_1$ فهل يكون متصلًا عندها؟ وإذا كان غير متصل عند $s = s_1$ فهل يمكن أن يكون قابلاً للاشتقاق عند $s = s_1$ ؟

نظرية ١

إذا كان q اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند $s = s_1$ فإنه يكون متصلًا عند $s = s_1$.

البرهان

بما أن q قابل للاشتقاق عند $s = s_1$ ، فإن $q'(s_1) = \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{q(s) - q(s_1)}{s - s_1}$ موجودة

والمطلوب إثبات أن $\lim_{s \rightarrow s_1} q(s) = q(s_1)$

$$q(s) - q(s_1) = (q(s) - q(s_1)) \left(\frac{s - s_1}{s - s_1} \right), \quad s \neq s_1$$

بأخذ النهاية للطرفين

$$\lim_{s \rightarrow s_1} (q(s) - q(s_1)) = \lim_{s \rightarrow s_1} (q(s) - q(s_1)) \times \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{s - s_1}{s - s_1} = (q(s_1) - q(s_1)) \times 1 = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow s_1} (q(s) - q(s_1)) = 0$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow s_1} q(s) = q(s_1)$$

وبما أن $q(s_1)$ معرفة، فإن $q(s)$ متصل عند $s = s_1$.

مثال ١

$$\left. \begin{array}{l} s^2 - 4s, \quad s < 2 \\ s^2 + 8s + 4, \quad s \geq 2 \end{array} \right\} = q(s)$$

قابلاً للاشتقاق عند $s = 2$ ، فجد قيمة الثابت A .

الحل

بما أن ق اقتران قابل للاشتقاق عند $s = -2$ ، فإن ق(س) متصل عند $s = -2$ ، أي أن نهيا ق(س) موجودة وعليه يكون:

$$\text{نهيا}_{s \rightarrow -2} (8s + 1) = \text{نهيا}_{s \rightarrow -2} (s^3 - 4s)$$

$$-16 + 8 = 16 - 8 \text{ ، ومنه } 16 = 8$$

هندسيًا إذا كان ق اقترانًا قابلاً للاشتقاق عند $s = 1$ ، فإنه يوجد لمنحنى الاقتران ق مماسًا واحدًا فقط عند $(1, 1)$.

والمثال الآتي يوضح أن عكس النظرية (١) غير صحيح. (أي أنه: إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند $s = 1$ ، فليس شرطًا أن يكون قابلاً للاشتقاق عند $s = 1$)



$$\left. \begin{array}{l} s \leq 3 , \quad \sqrt{s+3} \\ s > 3 , \quad 3-s \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س) ، فأجب عن كل مما يأتي:}$$

(١) ابحث في اتصال الاقتران ق عند $s = 4$

(٢) ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند $s = 4$

الحل

$$(١) \text{نهيا}_{s \rightarrow 4} \text{ ق(س)} = \text{نهيا}_{s \rightarrow 4} (3-s) = 7 - 4 = 3$$

$$\text{نهيا}_{s \rightarrow 4} \text{ ق(س)} = \text{نهيا}_{s \rightarrow 4} (\sqrt{s+3}) = \sqrt{4+3} = 3$$

$$\text{ومنه: نهيا}_{s \rightarrow 4} \text{ ق(س)} = 3$$

$$\text{ق(4)} = \sqrt{4+3} = 3$$

∴ الاقتران ق متصل عند س = ٤ لأنَّ نهيا ق(س) = ق(٤)

(٢) لإيجاد ق (٤) جد ق- (٤) ، ق+ (٤) ، لماذا؟

$$ق- (٤) = نهيا_{س \leftarrow ٤} = \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤} = \frac{٣س - ٧ - ٥}{س - ٤}$$

$$= نهيا_{س \leftarrow ٤} = \frac{٣(٤ - س)}{٤ - س} = ٣$$

$$ق+ (٤) = نهيا_{س \leftarrow ٤} = \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤} = \frac{٢س + ٣ - ٥}{س - ٤} = \frac{٢س - ٢}{س - ٤}$$

$$= نهيا_{س \leftarrow ٤} = \frac{٢س - ٢}{س - ٤} \times \frac{٢ + \sqrt{س}}{٢ + \sqrt{س}} = \frac{٢س - ٢}{(٢ + \sqrt{س})(٤ - س)}$$

ق (٤) غير موجودة لأنَّ ق- (٤) ≠ ق+ (٤) . أي أنَّ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٤ .
لاحظ هنا أنَّ ق اقتران متصل عند س = ٤ لكن ق (٤) غير موجودة.

ملاحظة

يمكنك إيجاد نهيا_{س \leftarrow ٤} بتحليل المقام إلى (٢ + √س)(٢ - √س) .

تدريب ١

إذا كان ق(س) = $\left\{ \begin{array}{l} ١ + \frac{٤}{س} ، س \leq ٢ \\ ٥س - ١ ، س > ٢ \end{array} \right.$ ، فأجب عن كلِّ مما يأتي:

(١) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

(٢) ابحث في قابلية اشتقاق الاقتران ق عند س = ٢

لا بدَّ أنَّك لاحظت أنَّ كل الاقترانات في الأمثلة السابقة التي تم بحث مشتقتها عند نقطة كانت متصلة عند هذه النقطة، لكن ماذا يحدث لمشتقة الاقتران عند نقطة؛ إذا كان الاقتران غير متصل عند هذه النقطة؟

تناقش النظرية الآتية علاقة عدم الاتصال عند نقطة بقابلية الاشتقاق عندها.

نظرية ٢

إذا كان q اقتراناً غير متصل عند النقطة $(s, q(s))$ ، فأبغ غير قابل للاشتقاق عندها.

مثال ٣

إذا كان $q(s) = [\frac{1}{3}s + 2]$ ، فأبغ عما يأتي :

(١) ابغث قابلية الاقتران q للاشتقاق عند $s = 1$.

(٢) ابغث قابلية الاقتران q للاشتقاق عند $s = 3$.

الحل

(١) أعد تعريف الاقتران q حول $s = 1$

$q(s) = 2$ لكل $s \in [0, 3]$

q متصل عند $s = 1$. تحقّق من ذلك.

لماذا؟

$$q(1) = 2 = \lim_{s \rightarrow 1} q(s) = \lim_{s \rightarrow 1} [\frac{1}{3}s + 2] = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} \neq 2$$

(٢) أعد تعريف q حول $s = 3$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq s < 3, \\ 3 \leq s < 6 \end{array} \right\} q(s) = [\frac{1}{3}s + 2]$$

ابغث في اتصال الاقتران q عند $s = 3$ قبل أن تبغث قابليته للاشتقاق عند $s = 3$.

$$\lim_{s \rightarrow 3^-} q(s) = 3, \quad \lim_{s \rightarrow 3^+} q(s) = 4 \neq 3$$

بما أن $\text{نهيـا ق(س)} \neq \text{نهيـا ق(س)}$ ، فإن:

نهيـا ق(س) غير موجودة ، أي أن ق غير متصل عند $\text{س} = 3$ وعليه فإن ق غير قابل للاشتقاق عند $\text{س} = 3$ (نظرية ٢).

تدريب ٢

$$\left. \begin{array}{l} 2 > \text{س} \geq 0 , \quad \sqrt{1+\text{س}} \\ 5 \geq \text{س} \geq 2 , \quad \text{س}^2 - 1 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فابحث قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند $\text{س} = 2$ ، $\text{س} = 4$.

مثال ٤

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq \text{س} \geq 1 , \quad 4 - \frac{6}{\text{س}} \\ 5 \geq \text{س} > 2 , \quad 1 + \text{س}^3 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

الحل

، فجد ق(س) على مجاله.

(١) ق اقتران غير قابل للاشتقاق عند $\text{س} = 1$ ، $\text{س} = 5$ لأنهما طرفا فترة

(٢) ابحث في اتصال الاقتران ق عند $\text{س} = 2$ ، لماذا؟

$$\text{نهيـا ق(س)} = \text{نهيـا}_{\text{س} \leftarrow 2} \left(4 - \frac{6}{\text{س}} \right) = 1 -$$

$$\text{نهيـا ق(س)} = \text{نهيـا}_{\text{س} \leftarrow 2} (1 + \text{س}^3) = 7$$

بما أن $\text{نهيـا ق(س)} \neq \text{نهيـا ق(س)}$ ، فإن نهيـا ق(س) غير موجودة

∴ ق غير متصل عند $\text{س} = 2$ وعليه فإن ق(2) غير موجودة.

(٣) ابحث المشتقة عندما $1 < \text{س} < 2$

$$\text{ق(س)} = \text{نهيـا}_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نهيـا}_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \frac{\left(4 - \frac{6}{\text{ع}} \right) - \left(4 - \frac{6}{\text{س}} \right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \frac{\frac{6}{س} - \frac{6}{ع}}{ع - س} \text{ نهيا } \leftarrow \frac{6}{ع}$$

$$= \frac{6س - 6ع}{ع - س} \text{ نهيا } \leftarrow \frac{6}{ع}$$

$$= \frac{6 - 6س}{ع - س} \text{ نهيا } \leftarrow \frac{6}{ع}$$

(٤) ابحت المشتقة عندما $5 > س > 2$

$$\frac{ق(س) - ق(س + هـ)}{هـ} \text{ نهيا } \leftarrow \frac{ق(س) - ق(س + هـ)}{هـ}$$

$$= \frac{(1 + 3س) - (1 + 3(س + هـ))}{هـ} \text{ نهيا } \leftarrow \frac{(1 + 3س) - (1 + 3(س + هـ))}{هـ}$$

$$= \frac{1 - 3س - 1 + 3 + 3هـ}{هـ} \text{ نهيا } \leftarrow \frac{1 - 3س - 1 + 3 + 3هـ}{هـ}$$

$$= \frac{3 - 3هـ}{هـ} \text{ نهيا } \leftarrow \frac{3 - 3هـ}{هـ}$$

مما سبق تجد أن:

$$\left. \begin{array}{l} 2 > س > 1 , \quad \frac{6 - 6س}{ع - س} \\ 5, 2, 1 = س , \quad \text{غير موجودة} \\ 5 > س > 2 , \quad 3 \end{array} \right\} = ق(س)$$

تمارين ومسائل

(١) ابحث في قابلية اشتقاق كل اقتران مما يأتي عند قيمة (قيم) s المبينة إزاء كلٍّ منها:

$$أ) (ق) (s) = \frac{s}{1-s}, \quad s = 1$$

$$ب) ع (s) = (s-2) [s], \quad s = 2$$

$$ج) ل (s) = [3-2s], \quad s = \frac{1}{4}, \quad s = -1$$

$$د) ك (s) = \left. \begin{array}{l} s^2 + 2s, \quad 0 \leq s < 3 \\ 3-s^2, \quad 3 \leq s \leq 5 \\ s=0, \quad s=3, \quad s=5 \end{array} \right\}$$

$$٢) إذا كان ق (s) = \left. \begin{array}{l} \frac{9-s}{3-s}, \quad s \neq 9 \\ 6, \quad s = 9 \end{array} \right\}$$

فجد ق (٩) إن وُجدت.

$$٣) إذا كان هـ (s) = \left. \begin{array}{l} s^2, \quad s \geq 1 \\ s^2 + 1, \quad s < 1 \end{array} \right\}$$

اقتراً قابلاً للاشتقاق عند $s=1$ ، فجد قيمة الثابت أ.

$$٤) إذا كان ق (s) = \left. \begin{array}{l} s^2 - 1, \quad s > 1 \\ s^2, \quad 1 \geq s \geq -1 \\ s, \quad s < -1 \end{array} \right\}$$

ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة ق (s).

$$٥) إذا كان ع (s) = \left. \begin{array}{l} s^2 - 2s, \quad s > 2 \\ s^2 - s, \quad s \leq 2 \end{array} \right\}$$

فابحث في قابلية الاقتران ع للاشتقاق عند $s=2$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq s, \\ 0 < s < 4, \\ s \leq 4, \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان ق} \left. \begin{array}{l} 0 \\ s-5 \\ \frac{1}{s-5} \end{array} \right\}$$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة ق (س).

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq s < 2, \\ 2 \leq s \leq 4, \\ |s-3| \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان ق} \left. \begin{array}{l} [s] \\ s-3 \end{array} \right\}$$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة ق (س).



JO | ACADEMY.com

قواعد الاشتقاق

Rules of Differentiation

الفصل الثاني

النتائج

- تستخدم قواعد الاشتقاق لإيجاد المشتقات.
- تجد المشتقات العليا لاقترانات و علاقات معطاة حتى المشتقة الرابعة.
- تجد مشتقات الاقترانات الدائرية.
- تستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة صيغ الاقترانات المركبة.
- تجد مشتقة علاقة ضمنية.

Differentiation Rules 1

قواعد الاشتقاق (١)

أولاً

إذا كان $ق(س) = س^٣ |س|$ ، فجد $ق(س)$ عند $س = ٤$.

درست سابقاً إيجاد مشتقة اقترانات بسيطة باستخدام التعريف، ولكن إيجاد مشتقات بهذه الطريقة لاقترانات مثل $ق(س) = (س^٣ + س^٦ - ٥)$ أو $ق(س) = س^٣ |س|$ عند $س = ٤$ يتطلب إجراء عمليات جبرية مطولة.

في هذا الدرس ستتعلم قواعد تمكّنك من إيجاد المشتقة بطرق مختصرة.

قاعدة (١)

إذا كان $ق(س) = ج$ ، حيث $ج$ عدد ثابت ، فإن $ق(س) = صفرًا$ ، لكل $س \in ح$.

البرهان

باستخدام تعريف المشتقة يكون

$$ق(س) = \lim_{ه \rightarrow س} \frac{ق(س+ه) - ق(س)}{ه} = \lim_{ه \rightarrow س} \frac{ق(ج+ه) - ق(ج)}{ه} = \lim_{ه \rightarrow س} \frac{ج - ج}{ه} = صفرًا$$

تفسير هذه النتيجة هندسيًا بأن التمثيل البياني للاقتران الثابت $ق(س) = ج$ مستقيم أفقي، وميل المستقيم الأفقي = صفرًا.

مثال ١

إذا كان $q(s) = \sqrt[3]{s}$ فجد $q'(s)$ ، $q'(1)$ ، $q'(-4)$

الحل

$q'(s) = 0$ ، لكل $s \in \mathbb{R}$ ؛ لأن $q(s)$ اقتران ثابت.

$q'(1) = 0$ ، $q'(-4) = 0$

قاعدة (٢)

إذا كان $q(s) = s^n$ ، حيث n عدد صحيح موجب، فإن $q'(s) = n s^{n-1}$

البرهان

سنحتاج الحقيقة الآتية في البرهان

$$s^n - s^{n-1} = (s - s^{n-1}) (s + s^{n-2} + \dots + s^2 + s + 1)$$

$$q'(s) = \frac{s^n - s^{n-1}}{s - s^{n-1}} \quad (\text{المشتقة الأولى من التعريف})$$

$$= \frac{s^n - s^{n-1}}{s - s^{n-1}}$$

$$= \frac{(s^n - s^{n-1}) (s + s^{n-2} + \dots + s^2 + s + 1)}{s - s^{n-1}}$$

$$= (s^n - s^{n-1}) (s + s^{n-2} + \dots + s^2 + s + 1)$$

$$= s^n + s^{n-1} + \dots + s^2 + s + 1 \quad n \text{ من المرات}$$

$$= n s^{n-1}$$

مثال ٢

جد $q'(s)$ ثم جد $q'(1)$ في كل مما يأتي:

$$(3) \quad q(s) = s^2$$

$$(2) \quad q(s) = s$$

$$(1) \quad q(s) = s^0$$

الحل

$$(١) \text{ ق (س) } = ٥ \text{ س}^٤, \quad \text{ق (١-)} = ٥,$$

$$(٢) \text{ ق (س) } = ١ \times \text{س}^١ = ١, \quad \text{ق (١-)} = ١,$$

$$(٣) \text{ ق (س) } = ١٢ \text{ س}^{١١}, \quad \text{ق (١-)} = ١٢ -$$

نحتاج إيجاد مشتقات اقترانات مكونة من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة اقترانات بسيطة، سنناقش إيجاد هذه المشتقات في القواعد الآتية.

قاعدة (٣)

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س، ج عدد ثابت، وكان هـ (س) = ج ق (س)، فإن:
الاقتران هـ (س) قابل للاشتقاق عند س وأن هـ' (س) = ج ق' (س).

البرهان

$$\text{هـ}' (س) = \frac{\text{هـ} (س) - \text{هـ} (ع)}{س - ع} = \frac{\text{ج ق (س)} - \text{ج ق (ع)}}{س - ع} = \text{ج} \frac{\text{ق (س)} - \text{ق (ع)}}{س - ع} = \text{ج ق}' (س)$$

أي أن مشتقة عدد ثابت مضروباً في اقتران يساوي العدد الثابت مضروباً في مشتقة الاقتران.

مثال ٣

جد ق' (س) في كل مما يأتي:

$$(١) \text{ ق (س) } = ٤ \text{ س}^٥, \quad (٢) \text{ ق (س) } = -\text{س}^٦, \quad (٣) \text{ ق (س) } = \frac{\text{س}^٣}{\pi}$$

الحل

$$(١) \text{ ق (س) } = ٤ \times (٥ \text{ س}^٤) = ٢٠ \text{ س}^٤$$

$$(٢) \text{ ق (س) } = (١-) (٦ \text{ س}^٥) = -٦ \text{ س}^٥$$

$$(٣) \text{ ق (س) } = \frac{١}{\pi} (٣ \text{ س}^٢) = \frac{٣}{\pi} \text{ س}^٢$$

تدريب ١

جد مشتقة كلٍّ من الاقتارات الآتية:

$$(١) ق_١(س) = ٦ \quad (٢) ق_٢(س) = -٤س^٢ \quad (٣) ق_٣(س) = \frac{س}{٢\sqrt{٢}}$$

مثال ٤

إذا كان $ق(س) = س^٤ | س |$ فجد $ق'(٢-)$

الحل

عبّر عن $ق(س)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة حول العدد -٢ :

$$ق(س) = س^٤ | س | = س - س^٥ \quad ، \quad \text{لماذا؟}$$

$$ق'(س) = -٥س^٤$$

$$\therefore ق'(٢-) = -٥(٢-) = ١٠$$

قاعدة (٤)

قاعدة الجمع والطرح

إذا كان كلٌّ من الاقترانين $ل$ ، $م$ قابلاً للاشتقاق عند $س$ ، وكان،

$$ق(س) = ل(س) + م(س) \quad ، \quad هـ(س) = ل(س) - م(س)$$

فإنَّ كلاً من الاقترانين $ق$ ، $هـ$ قابل للاشتقاق عند $س$ ، وتكون:

$$ق'(س) = ل'(س) + م'(س)$$

$$هـ'(س) = ل'(س) - م'(س)$$

البرهان

$$ق'(س) = \lim_{\Delta س \rightarrow ٠} \frac{ق(س + \Delta س) - ق(س)}{\Delta س} = \lim_{\Delta س \rightarrow ٠} \frac{ق(س) + (ل(س + \Delta س) + م(س + \Delta س)) - ق(س)}{\Delta س}$$

$$= \lim_{\Delta س \rightarrow ٠} \frac{ل(س + \Delta س) - ل(س)}{\Delta س} + \lim_{\Delta س \rightarrow ٠} \frac{م(س + \Delta س) - م(س)}{\Delta س}$$

$$= ل'(س) + م'(س)$$

لإثبات أنَّ $هـ'(س) = ل'(س) - م'(س)$ ، يمكن كتابة $هـ(س)$ على الصورة:

$هـ(س) = ل(س) + (-١)م(س)$ وباستخدام قاعدة مشتقة مجموع اقترانين؛ وقاعدة مشتقة حاصل

ضرب عدد ثابت في اقتران تجد أن $هـ(س) = ل(س) + (١ - م(س))$ ومنه $هـ(س) = ل(س) - م(س)$

مثال ٥

جد ق(س) في كل مما يأتي :

$$(١) \text{ ق(س) } = ٧س^٢ + \sqrt[٣]{٣س^٤} \quad (٢) \text{ ق(س) } = ٤س^٠ - \pi س^٦$$

الحل

$$(١) \text{ ق(س) } = ٤س + \sqrt[٣]{٣س^٤}$$

$$(٢) \text{ ق(س) } = ٢٠س^٤ - \pi س^٦$$

وبصورة عامة : إذا كان كل من الاقترانات $ق_١$ ، $ق_٢$ ، ... ، $ق_n$ قابلاً للاشتقاق عند س وكان :

$$ل(س) = ق_١(س) + ق_٢(س) + ... + ق_n(س) \text{ ، فإن :}$$

$$ل'(س) = ق'_١(س) + ق'_٢(س) + ... + ق'_n(س)$$

نتيجة

إذا كان ق اقتراناً كثير حدود ، فإن ق قابل للاشتقاق لكل س $\in \mathbb{R}$.

مثال ٦

إذا كان ق(س) = $٤س^٣ - ٦س^٢ + ٤س$ ، فجد كلاً مما يأتي :

$$(١) \text{ ق(س) } \quad (٢) \text{ قيم س التي يكون عندها لمنحنى الاقتران ق مماس أفقي.}$$

الحل

$$(١) \text{ ق(س) } = ٤س^٣ - ١٢س^٢ + ١٢س$$

$$(٢) \text{ يكون المماس أفقيًا عندما ق'(س) = ٠}$$

$$\text{أي أن } ٤س^٣ - ١٢س^٢ + ١٢س = ٠$$

$$٤س(س^٢ - ٣س + ٣) = ٠$$

$$\text{ومنه } س = ٠ ، س = \pm \sqrt[٣]{٣}$$

$$\therefore \text{ يكون المماس أفقيًا عند } س = ٠ ، س = \pm \sqrt[٣]{٣}$$

تدريب ٢

إذا كان $ق(س) = ٥س^٤ (٢س - \frac{٣}{س})$ فجد $ق(١-)$

مثال ٧

إذا كان $ق(س) = ٤س^٣ - [١ + ٢س]$ فجد $ق(٠,٦)$

الحل

أعد تعريف الاقتران $ق$ دون استخدام رمز اقتران أكبر عدد صحيح حول $س = ٠,٦$

$[١ + ٢س]$ يغير قاعدته بعد كل فترة طولها $\frac{١}{٢}$ ، وبما أن $٠,٦ \in [١, \frac{١}{٢})$

$$٢ = [٢, ٢] = [١ + ٠,٦ \times ٢] = [١ + ٢س]$$

إذن تصبح القاعدة $ق(س) = ٤س^٣ - ٢$

$$ق(س) = ١٢س^٢$$

$$ق(٠,٦) = ١٢ \times (٠,٦)^٢ = ٤,٣٢$$

مثال ٨

إذا كان $ق(س) = |س - ٢| + ٣س^٢$ ، فجد $ق(١)$.

الحل

أعد تعريف الاقتران $ق(س)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

لاحظ أن $|س - ٢| = ٢ - س$ حول العدد ١

وعليه فإن $ق(س) = ٣س^٢ - ٢ + س$

$$ق(س) = ٦س - ١$$

$$ق(١) = ٥$$

تدريب ٣

أجب عن كل مما يأتي :

(١) إذا كان $ق(س) = ٢س^٣ (٤س - ٥س^٢)$ فجد $ق(س)$.

(٢) إذا كان $ق(س) = [١ + ٣س] + |س|$ فجد $ق(٠,٤)$.

(١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

$$\begin{array}{ll} \text{أ) } (ق(س) = \sqrt{3 \cdot s}) & \text{ب) } ص = ٤س^{١٠} \\ \text{ج) } ص = \pi ٤س^٢ & \text{د) } (ق(س) = (\frac{1}{٣}س)^٤ \end{array}$$

(٢) جد $\frac{دص}{دس}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

$$\begin{array}{ll} \text{أ) } ص = ٤س^٢ + ٣س - ٤ & \text{ب) } ص = \frac{1}{٤}(س + ٨) \\ \text{ج) } ص = \frac{٤}{٣}\pi س^٢ & \text{د) } ص = \frac{1}{٤}س^٤ + \frac{1}{٣}س^٣ - س \end{array}$$

(٣) جد ق(س) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

$$\begin{array}{ll} \text{أ) } (ق(س) = \frac{1}{٣}س^٤ & ، س = ١ \\ \text{ب) } (ق(س) = س^٢ + |٣س - ٦| & ، س = ٣ \\ \text{ج) } (ق(س) = [\frac{1}{٣}س + ٥] - ٤س^٢ & ، س = ٤ ، ٢ \\ \text{د) } (ق(س) = ٣س + [١ + ٠س] - |س| & ، س = ١ - \end{array}$$

(٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ل(٢-) = ٤، هـ(٢-) = ٣-، فجد ق(٢-) في كلٍّ مما يأتي :

$$\begin{array}{ll} \text{أ) } (ق(س) = ٦ل(س) - ٢هـ(س) & \\ \text{ب) } (ق(س) = \frac{1}{٣}ل(س) + هـ(س) + س^٣ & \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{أ) } ١ \geq س ، \\ \text{ب) } ١ < س ، \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{أ) } ٢س + ب \\ \text{ب) } ٤س + ب - ٢س \end{array} = (ق(س) \text{ إذا كان ل(س) = ١}$$

وكانت ق(١) موجودة، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ، ب.

$$٦) \text{ إذا كان } \left. \begin{array}{l} \text{ل(س)} \\ \text{س} \geq \text{ج} \end{array} \right\} = \text{ق(س)} \\ \left. \begin{array}{l} \text{ل(ج)} \\ \text{س} < \text{ج} \end{array} \right\} = \text{ق(س-ج)}$$

وكان ق(س) اقتراناً متصلًا عند س = ج ، وكان ل(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = ج .
فأثبت أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = ج ، ثم جد ق(ج) .



$$\text{إذا كان ق(س) = } \frac{٤س^٣ - ٢س}{١ + ٢س + ٤س^٤}, \text{ فجد ق'(س).}$$

تعلمت سابقًا القواعد العامة للاشتقاق نوع معين من الاقتارات، وستتعرف في هذا الدرس قواعد أخرى.

لإيجاد مشتقة الاقتران ق(س) = (س^٣ + س^٦ - ٥) (١ + ٤س^٢) جد ناتج الضرب ثم استخدم قواعد الاشتقاق السابقة.

$$\text{ق(س) = } ٤س^٥ + ٢٥س^٣ - ٢٠س^٢ + ٦س - ٥$$

$$\text{ق'(س) = } ٢٠س^٤ + ٧٥س^٢ - ٤٠س + ٦$$

يمكن إيجاد ق'(س) دون إيجاد ناتج الضرب كما في القاعدة الآتية:

قاعدة (١)

قاعدة الضرب

إذا كان الاقتران ل، ه قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = ل(س) × ه(س)، فإنّ الاقتران ق يكون قابلاً للاشتقاق عند س، وإنّ:

$$\text{ق'(س) = ل(س) × ه'(س) + ل'(س) × ه(س)}$$

أي أنّ مشتقة حاصل ضرب اقترانين تساوي:

الاقتران الأول × مشتقة الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الأول

مثال ١

إذا كان ق(س) = (س^٣ + س^٦) (٣ - ٤س^٢) فجد ق'(س).

الحل

$$\text{ق'(س) = (س}^٣ + \text{س}^٦) \frac{٥}{٢س} (٣ - ٤س^٢) + (٣ - ٤س^٢) \frac{٥}{٢س} (س^٣ + س^٦)$$

$$\begin{aligned}
 &= (س^3 + 6س)(س^8) + (س^4 - 3س^2)(3س^3 + 6) \\
 &= 8س^4 + 48س^2 + 12س^4 - 2س^2 + 18 - 9س^2 = 18 - 2س^2 + 20س^4 = 18 - 2س^2 + 20س^4
 \end{aligned}$$

حلّ المثال (١) بطريقة أخرى.

تدريب ١

إذا كان ق(س) = (س^4 - 2س^3) (س^3 + 1/س) فجد ق'(س).

قاعدة (٢)

قاعدة القسمة

إذا كان الاقترانان ل، ه قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = $\frac{ل(س)}{ه(س)}$ ، ه(س) ≠ ٠، فإن الاقتران ق يكون قابلاً للاشتقاق عند س، وإن

$$ق'(س) = \frac{ه(س) \times ل'(س) - ل(س) \times ه'(س)}{ه(س)^2}$$

أي أن مشتقة حاصل قسمة اقترانين تساوي :

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال ٢

إذا كان ق(س) = $\frac{س^3 + 5س}{س^2 + 5}$ ، فجد ق'(س).

الحل

استخدم قاعدة القسمة لتجد أن:

$$ق'(س) = \frac{(س^2 + 5) \times \frac{3س^2}{س^3} - (س^3 + 5س) \times \frac{2س}{س^2}}{(س^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{(س^2 + 5)(3س^2) - (س^3 + 5س)(2س)}{(س^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{3س^4 + 15س^2 - (2س^4 + 10س^2)}{(س^2 + 5)^2} = \frac{س^4 + 5س^2}{(س^2 + 5)^2}$$

تدریب ۲

إذا كان $\frac{s^2 + 1}{s^2 - 4}$ فجد $\frac{s}{s^2 + 1}$

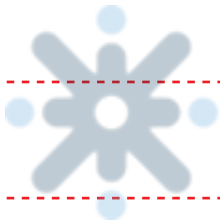
قد تواجهك بعض الاقتراحات المكوّنة من بسط ومقام يكون بسطها عددًا ثابتًا . النتيجة الآتية تُسهل عليك العمليات الجبرية لإيجاد مشتقة مثل هذه الاقتراحات.

نتيجة (١)

إذا كان الاقتران ل قابلاً للاشتقاق عند س، أعدد ثابت وكان:

$$ق(س) = \frac{ل(س)}{ل(س)}$$
 ، ل(س) $\neq 0$. فإن الاقتران ق يكون قابلاً للاشتقاق عند س، وإن:

$$\frac{ق(س) - ل(س)}{ل(س)} = ق(س)$$



فکر و ناقش

أثبت نتيجة (١).

نتيجة (٢)

إذا كان $q(s) = s^n$ ، $s \neq 0$ ، n عدد صحيح سالب، فإن $q(s) = n s^{n-1}$

البرهان

افرض اَن $n = -m$ ، $s \neq 0$ ، حيث m عدد صحيح موجب، فيكون $q(s) = s^n = s^{-m}$.

باستخدام خصائص الأسس يكون $q(s) = \frac{1}{s^m}$

$${}^1\text{م} - {}^2\text{م} = {}^2\text{م} - {}^1\text{م} = \frac{{}^1\text{م} \times {}^2\text{م}}{({}^2\text{م})} = \frac{({}^1\text{م})(1) - 0 \times {}^2\text{م}}{({}^2\text{م})} = \text{ق}(\text{س})$$

قَ (س) = م - س⁻ م⁻ = ن س⁻ ن⁻ لأن م - م = ن

مثال ٣

جد مشتقة كلٍّ من الاقتارات الآتية:

$$(١) ل(س) = \frac{\pi}{س^2} \quad (٢) ق(س) = س^{-٤} \quad (٣) ع(س) = \frac{س^{-٤} - ٣}{س^3}$$

الحل

(١) باستخدام النتيجة (١) يكون:

$$ل'(س) = \frac{\pi \cdot 2}{س^3} = \frac{2\pi}{س^3}$$

(٢) باستخدام النتيجة (٢) يكون:

$$ق'(س) = -٤ س^{-٥} = -\frac{٤}{س^٥}$$

(٣) يمكن إعادة كتابة ق على الصورة

$$ع(س) = \frac{س^{-٤}}{س^3} - \frac{٣}{س^3} = س^{-٧} - \frac{٣}{س^3}$$

باستخدام النتيجة (٢) وقواعد الاشتقاق يكون:

$$ع'(س) = -٧ س^{-٨} - \frac{٣ \cdot ٣}{س^4} = -\frac{٧}{س^٨} - \frac{٩}{س^4}$$

فكر وناقش

حلّ فرع (٣) من مثال (٣) بطريقة أخرى.

تدريب ٣

جد $\frac{ص}{س}$ لكلٍّ مما يأتي:

$$(١) ص = \frac{\sqrt{٣}}{س^2} \quad (٢) ص = \frac{٢ - س^3}{س}$$

مشتقة الاقتران المتشعبة

$$\left. \begin{array}{l} \text{ل (س)} , \text{س} \leq \text{أ} \\ \text{هـ (س)} , \text{س} > \text{أ} \end{array} \right\} = \text{لايجاد مشتقة الاقتران المتشعب ق (س)}$$

حيث ل (س) موجودة لكل س < أ ، هـ (س) موجودة لكل س > أ ، اتبع الخطوات الآتية:

(١) جد ل (س) عندما س < أ ، هـ (س) عندما س > أ فيكون :

$$\left. \begin{array}{l} \text{ل (س)} , \text{س} < \text{أ} \\ \text{هـ (س)} , \text{س} > \text{أ} \end{array} \right\} = \text{ق (س)}$$

(٢) ابحث في اتصال ق (س) عند س = أ وهناك حالتان :

أ) ق اقتران غير متصل عند س = أ وبناءً عليه ق غير قابل للاشتقاق عند س = أ (نظرية ٢ في الاتصال والاشتقاق)

ب) ق متصل عند س = أ وفي هذه الحالة يجب بحث قابلية الاشتقاق عند س = أ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

ويمكنك استخدام قواعد الاشتقاق في الاقتران المتشعبة التي قواعدها على صورة كثيرات حدود أو نسبية.

مثال ٤

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \leq ١ , \text{س}^٣ + ٤\text{س}^٢ \\ \text{س} > ١ , ٨ - \text{س} + ١٢\text{س}^٢ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س) ، فجد ق (س) .}$$

الحل

(١) عندما س < ١ ، ق اقتران متصل؛ لأنه على صورة كثير حدود، إذن ق (س) = ٢٤س^٢ + ٤

عندما س > ١ ، ق اقتران متصل؛ لأنه على صورة كثير حدود، إذن ق (س) = ١٦س + ١٢

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} < ١ , ٢٤\text{س}^٢ + ٤ \\ \text{س} > ١ , ١٦\text{س} + ١٢ \end{array} \right\} = \text{أي إن ق (س)}$$

(٢) ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند $s = ١$.

لماذا؟

ق متصل عند $s = ١$

$$٢٨ = ٤ + ٢(١)٢٤ = (١)_+ ق$$

$$٢٨ = ١٢ + (١)١٦ = (١)_- ق$$

$$٢٨ = (١)_+ ق = (١)_- ق$$

$$٢٨ = (١) ق إذن$$

يمكنك الآن كتابة ق (س) لكل $s \in \mathbb{C}$ على الصورة :

$$\left. \begin{array}{l} ٢٤س + ٤ ، \quad s < ١ \\ ٢٨ ، \quad s = ١ \\ ١٦س + ١٢ ، \quad s > ١ \end{array} \right\} = (س) ق$$

مثال ٥

إذا كان ق (س) = $s^٢ |s - ٢|$ فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على $\mathbb{C}$.

الحل

(١) أعد كتابة الاقتران ق دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

$$\left. \begin{array}{l} s - ٢ ، \quad s \leq ٢ \\ s - ٢ ، \quad s > ٢ \end{array} \right\} = |s - ٢|$$

وعليه فإن:

$$\left. \begin{array}{l} s^٢ - ٢س^٣ ، \quad s \leq ٢ \\ ٢س^٢ - ٣س^٤ ، \quad s > ٢ \end{array} \right\} = (س) ق$$

(٢) عندما $s < ٢$ ، ق متصل لأنه على صورة كثير حدود، ق (س) = $s^٤ - ٢س^٣$

عندما $s > ٢$ ، ق متصل لأنه على صورة كثير حدود، ق (س) = $s^٦ - ٢س^٤$

$$\left. \begin{array}{l} s^٤ - ٢س^٣ ، \quad s < ٢ \\ s^٦ - ٢س^٤ ، \quad s > ٢ \end{array} \right\} = (س) ق أي أن$$

(٣) ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند $s = 2$.

لماذا؟

ق اقتران متصل عند $s = 2$

$$ق_+(2) = (2)4 - (2)6 = 8$$

$$ق_-(2) = (2)6 - (2)4 = 8$$

بما أن $ق_+(2) \neq ق_-(2)$ فإن $ق(2)$ غير موجودة.

يمكنك الآن كتابة $ق(s)$ لكل $s \in \mathbb{C}$ على الصورة :

$$ق(s) = \left. \begin{array}{l} 4s^3 - 6s^2, \quad s < 2 \\ \text{غير موجودة}, \quad s = 2 \\ 6s^2 - 4s^3, \quad s > 2 \end{array} \right\}$$

تدريب ٤



$$\left. \begin{array}{l} s \geq 1, \quad \frac{4}{s+1} \\ s < 1, \quad \frac{4}{s+1} \end{array} \right\} = ق(s) \text{ إذا كان } ق(s)$$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على $\mathbb{C}$.

(١) جد $\frac{ص}{س}$ في كلِّ مما يأتي:

(ب) $ص = (س^٣ - س^٢ + ١)(١ - س^٤)$

(أ) $ص = س^٢(١ + س^٣)$

(د) $ص = \frac{١ - س^٢}{٣ + س^٢}$

(ج) $ص = \frac{س^٣}{س - ١}$

(٢) جد ق(س) في كلِّ مما يأتي:

(أ) $ق(س) = س(س + ٢)(س^٢ - س^٣ - ٦)$

(ب) $ق(س) = |س - ٣| (س + س^٢)$

(ج) $ق(س) = \frac{س^٢ - س^٢ + ٤}{س^٢ + ٤}$

(د) $ق(س) = \frac{|س^٢ - ٤س + ٤|}{س(س - ١)}$ ، $س \in (١, ٥]$

(٣) إذا علمت أنَّ هـ(س) قابلٌ للاشتقاق وأنَّ هـ(٢) = ٣ ، هـ'(٢) = -١ ، فجد ق(٢) في كلِّ مما يأتي:

(ب) $ق(س) = س^٣ هـ'(س) - س^٥$

(أ) $ق(س) = س هـ(س)$

(د) $ق(س) = \frac{١ + س^٢}{٣ هـ(س)}$

(ج) $ق(س) = هـ(س) - \frac{١}{هـ(س)}$

(٤) إذا كان لـ هـ اقترايين قابلين للاشتقاق وكان لـ(٢) = ٣ ، ل'(٢) = -١ ، هـ(٢) = ٤ هـ'(٢) = ٦ ، فجد ق(٢) في كلِّ مما يأتي:

(ب) $ق(س) = \frac{هـ(س)}{١ + ل(س)}$

(أ) $ق(س) = ل(س) \times هـ(س)$

(٥) جد $Q(s)$ في كلِّ مما يأتي، عند قيمة s المبينة إزاء كلِّ منها:

أ) $Q(s) = s^2 - [1 + s^2]$ ، $s = 4, 1$

ب) $Q(s) = \frac{[3 + s \frac{1}{4}]}{|1 - s^2|}$ ، $s = 2$

ج) $Q(s) = \frac{1 + s^2}{s^2 - 4}$ ، $s = -1$

(٦) إذا كانت L, M ، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق عند s ، فاستخدم قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين لإثبات أن:

$$\frac{d}{ds} (L(s) \times M(s) \times H(s)) = L(s) \times M(s) \times H'(s) + L(s) \times M'(s) \times H(s) + L'(s) \times M(s) \times H(s)$$

(٧) اعتمد على النتيجة في السؤال (٦) لإثبات أن:

$$\frac{d}{ds} (L(s))^3 = 3(L(s))^2 \times L'(s)$$

(٨) إذا كان $Q(s) = \begin{cases} s^4, & s \geq 1 \\ s^3 + 1, & s < 1 \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران Q للاشتقاق عند $s = 1$ ، ثم اكتب قاعدة $Q'(s)$.

(٩) إذا كان $Q(s) = |s| (s^2 + s^6)$ ، فابحث في قابلية الاقتران Q للاشتقاق لجميع قيم $s \in \mathbb{R}$.

(١٠) إذا كان $Q(s) = \begin{cases} s^2 - b, & s \geq 2 \\ -4 - b s^3 + a s, & s < 2 \end{cases}$

وكان Q اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند $s = 2$ ، فجد كلاً من الثابتين a, b .

إذا كان $ق(س) = (س^٢ - س^٣ + ١)(س^٢ + ٧)$ ، فجد $ق'(س)$.

تعلمت سابقاً أنه إذا كان $ص = ق(س)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن مشتقته بالنسبة إلى $س$ تُسمى المشتقة الأولى للاقتان $ق$ ، ويُرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$ص، \frac{دص}{دس}، \frac{د}{دس}(ق(س))، ق'(س)$$

لاحظ أن $ق'(س)$ اقتران في $س$ يمكن أن يكون قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى $س$ ، ومشتقة $ق'(س)$ تُسمى **المشتقة الثانية** للاقتان $ق$ ، ويُرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$ص''، \frac{د^٢ص}{دس^٢}، \frac{د}{دس}(ق'(س))، ق''(س)$$

يمكنك أن تحسب مشتقة اقتران من أي رتبة تريد (شرط وجودها)، حيث إن **المشتقة الثالثة** هي

$$\text{مشتقة المشتقة الثانية ويُرمز لها بأحد الرموز: } ص''', \frac{د^٣ص}{دس^٣}, \frac{د}{دس}(ق''(س)), ق'''(س)$$

تُسمى مثل هذه المشتقات **بالمشتقات العليا** للاقتان $ق$. لاحظ أن التسلسل ضروري في إيجاد المشتقات، فمثلاً لإيجاد المشتقة الثالثة للاقتان؛ يجب إيجاد المشتقة الأولى ثم الثانية ثم الثالثة. إن استخدام الإشارات (////) للتعبير عن المشتقة الرابعة غير عملي وكذلك الأمر بالنسبة إلى المشتقات الخامسة والسادسة، ... إلخ. لذلك تُستخدم الأعداد الصحيحة بين قوسين للتعبير عن المشتقات الرابعة، والخامسة، ... إلخ. فمثلاً $ص^{(٤)}$ أو $ق^{(٤)}$ تعبر عن المشتقة الرابعة للاقتان $ق$. سنكتفي بإيجاد المشتقات حتى الرابعة في هذا الدرس.

مثال ١

إذا كان $ق(س) = س^٤ - س^٢ + س^٦ + ١$ ، فجد $ق'(س)$

الحل

$$ق'(س) = ٤س^٣ - ٢س + ٦س^٥ + ٠$$

$$ق'(س) = ٤س^٣ - ٢س + ٦س^٥ + ٠$$

$$ق(س) = 240 - 2س - 12$$

تدريب ١

- (١) إذا كان $ق(س) = 5س^3 - 4س^2 + 6س + 1$ ، فجد $ق(-1)$.
 (٢) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس .

مثال ٢

إذا كان $ق(س) = س^n$ ، وكان $ق(س) = 24س^{n-3}$ ، فجد قيمة n .

الحل

$$ق(س) = س^n = س^{n-3} \cdot 24$$

$$ق(س) = س^n = (ن - 1) س^{n-2}$$

$$ق(س) = س^n = (ن - 1)(ن - 2) س^{n-3} = 24س^{n-3}$$

$$\therefore 24 = (ن - 1)(ن - 2)$$

ابحث عن ثلاثة أعداد متتالية حاصل ضربها ٢٤ .

الأعداد هي ٢ ، ٣ ، ٤

أي أن $ن = ٤$.

تدريب ٢

إذا كان $ق(س) = \frac{1}{س}$ ، وكان $ق(س) = أس^٢$ ، فجد قيمة الثابت $أ$.

مثال ٣

إذا كان $ق(س) = \left. \begin{matrix} س^٢ ، س \leq ٠ \\ س > ٠ ، س \end{matrix} \right\}$ ، فأجب عن كل مما يأتي :

(١) بين أن الاقتران $ق$ قابل للاشتقاق عند $س = ٠$.

(٢) اكتب قاعدة $ق(س)$ لجميع قيم $س \in \mathbb{R}$.

(٣) بين أن $ق(٠)$ غير موجودة .

(١) ق اقتران متصل لجميع قيم $s < 0$ ، لأنه على صورة كثير حدود ، $ق(s) = 2s$.
ق اقتران متصل لجميع قيم $s > 0$ ، لأنه اقتران ثابت ، $ق(s) = 0$ صفرًا .

$$\therefore ق(s) = \left. \begin{array}{l} 2s , s < 0 \\ 0 , s > 0 \end{array} \right\}$$

ق اقتران متصل عند $s = 0$ ، تحقق من ذلك .

$$ق_+(0) = 2(0) = 0$$

$$ق_-(0) = 0$$

$$\text{بما أن } ق_+(0) = ق_-(0) = 0$$

إذن $ق(0) = 0$ ، ويكون الاقتران ق قابلاً للاشتقاق عند $s = 0$

(٢) يمكنك كتابة $ق(s)$ لجميع قيم $s \in \mathbb{R}$ على الصورة :

$$ق(s) = \left. \begin{array}{l} 2s , s < 0 \\ 0 , s \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{أو} \quad \left. \begin{array}{l} 2s , s < 0 \\ 0 , s \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$(٣) \text{ اتبع الخطوات السابقة لتصل إلى } ق(s) = \left. \begin{array}{l} 2s , s < 0 \\ 0 , s \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$ق_+(0) = 2(0) = 0 , ق_-(0) = 0$$

بما أن $ق_+(0) \neq ق_-(0)$ فإن $ق(0)$ غير موجودة .

تدريب ٣

$$\text{إذا كان } ق(s) = \left. \begin{array}{l} s^3 , s \leq 0 \\ 0 , s > 0 \end{array} \right\} , \text{ فأجب عن كل مما يأتي :}$$

(١) بين أن $ق$ كلاً من $ق_-(0)$ ، $ق_+(0)$ موجودة ، ثم جد قيمة كل منها .

(٢) اكتب قاعدة كل من $ق_-(s)$ ، $ق_+(s)$ لجميع قيم $s \in \mathbb{R}$.

(٣) بين أن $ق(0)$ غير موجودة .

(١) جد المشتقة الثانية لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ (ص = $4s^3 - \frac{7}{2}s^2 - 6s$) ب (ص = $\frac{s^2 + 1}{s}$)

ج (ص = $|s|(s^2 + 1)$)

(٢) إذا كان $q(s) = (s^2 + 4s)(s^3 + 1)$ ، فجد قيمة $q'(1 -)$ و $q'(1 +)$

(٣) إذا كان $q(s) = s^n$ ، n عدد صحيح موجب وكانت $q'(s) = As$ فجد قيمة الثابت A .

(٤) إذا كان $ص = \frac{2}{s}$ ، $s \neq 0$ ، فأثبت أن $ص = \frac{1}{s^2}$

(٥) إذا كان $q(s) = s^4 + s^3 - 6s^2 - s$ ، فجد قيم s التي تحقق ما يأتي :

أ ($q'(s) = 0$) ب ($q'(s) \leq 0$) ج ($q'(s) > 0$)

(٦) جد المشتقة الثالثة لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ (ص = $s^3 - 3s^0$)

ب (ص = $As^3 + Bs^2 + Cs$ ، حيث A, B, C ج ثوابت.

(٧) جد قيمة كلٍّ مما يأتي :

أ ($q'(\pi)$ حيث $q(s) = s^2 - 6s$)

ب ($q'(1 -)$ حيث $q(s) = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^0}$)

ج ($q^{(4)}(1)$ حيث $q(s) = \frac{1}{s}$)

(٨) إذا كان كلٌّ من L, L', L'' قابلاً للاشتقاق عند s ، وكان $q(s) = s^2 L(s)$

فجد $q'(s)$ ، $q''(s)$.

$$(\text{س}) (\text{ل} \times \text{هـ}) + (\text{س}) (\text{ل} \times \text{هـ})^2 + (\text{س}) (\text{ل} \times \text{هـ}) = (\text{س}) (\text{ل} \times \text{هـ})$$

(١١) إذا كان كلُّ من الاقترانين ل، هـ قابلاً للاشتقاق مرتين فأثبت أنَّ :

(١٢) إذا كانت ل، ق، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق حتى المشتقة الثالثة وكان

(١٣) إذا كان $q(s) = s^4 + \frac{16}{s}$ ، أثبت، وكان $q(2) = 9.0$ فجد قيمة الثابت أ.

(١٤) إذا كان $q(s) = 8s - 4(m - 3)s^2$ ، فجد قيم الثابت m التي تجعل $q(s) > 0$.

إذا كان $ق(س) = قاس + ظاس$ ، فجد $ق'(-\frac{\pi}{4})$.

تعلمت سابقاً الاقترانات المثلثية وتمثيلها البياني، وفي هذا الدرس ستتعلم إيجاد مشتقة هذه الاقترانات.

تعرفت سابقاً أن المشتقة الأولى للاقتران $ق$ عند $س$ هي: $ق'(س) = \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$ نهيا

ستستخدم هذا التعريف والنظرية
لإثبات القاعدتين الآتيتين:

قاعدة ١

إذا كان $ق(س) = جاس$ ، $س$ و $ح$ ، فإن $ق'(س) = جتا س$

البرهان

تذكر

$$\begin{aligned} جاع - جاس &= ٢ جتا \frac{ع + س}{٢} جاع - جاس \\ جتا ع - جتا س &= ٢ جتا \frac{ع + س}{٢} جتا ع - جتا س \end{aligned}$$

$$ق'(س) = \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \frac{جاس - جاس}{ع - س}$$

$$= \frac{جاع - جاس}{ع - س}$$

$$= \frac{٢ جتا \frac{ع + س}{٢} جاع - جاس}{ع - س}$$

$$= \frac{جتا ع - جتا س}{ع - س}$$

بفرض أن $ص = \frac{ع - س}{٢}$ يكون $\frac{ع + س}{٢} = س + ص$ ، وعندما $ع \leftarrow س$ ، فإن $ص \leftarrow ٠$.

$$\therefore \text{ق} (س) = \text{نهيا} \left(\text{جتا} (س + ص) \times \frac{\text{جاص}}{ص} \right)$$

$$= \text{نهيا} \text{جتا} (س + ص) \times \frac{\text{جاص}}{ص} = \text{جتا} (س + ٠) \times ١ = \text{جتا} س$$

مثال ١

إذا كان ق (س) = $س^2 + \frac{1}{3}$ جاس ، فجد ق (س).

الحل

$$\text{ق} (س) = س^2 + \frac{1}{3} \text{جتا} س$$

مثال ٢

إذا كان ق (س) = $س^2 - ٦$ جاس ، جد ق $(\frac{\pi}{6})$.

الحل

$$\text{ق} (س) = س^2 - ٦ \text{جتا} س$$

$$\text{ق} \left(\frac{\pi}{6} \right) = س^2 - ٦ \text{جتا} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times س^2 - ٦ = \sqrt{3} - ٦$$

تدريب ١

إذا كان ق (س) = $٢ + س^٦$ جاس ، فجد ق $(\frac{\pi}{3})$

قاعدة ٢

إذا كان ق (س) = جتا س ، س ءح ، فإن ق (س) = - جاس.

البرهان

$$\text{ق} (س) = \text{نهيا} \frac{\text{ق} (ع) - \text{ق} (س)}{ع - س} = \frac{\text{جتا} ع - \text{جتا} س}{ع - س}$$

$$= \frac{\text{جا} \frac{\text{ع} + \text{س}}{2} - \text{جا} \frac{\text{ع} - \text{س}}{2}}{\frac{\text{ع} - \text{س}}{2}} (1 - \text{نهيا} \leftarrow \text{ع} \leftarrow \text{س}) =$$

$$= (1 - \text{نهيا} \leftarrow \text{ع} \leftarrow \text{س}) \left(\text{جا} \frac{\text{ع} + \text{س}}{2} - \text{جا} \frac{\text{ع} - \text{س}}{2} \right)$$

بفرض $\text{ص} = \frac{\text{ع} - \text{س}}{2}$ يكون $\frac{\text{ع} + \text{س}}{2} = \text{س} + \text{ص}$ ،

عندما $\text{ع} \leftarrow \text{س}$ ، فإن $\text{ص} \leftarrow 0$.

$$\therefore \text{ق} (\text{س}) = (1 - \text{نهيا} \leftarrow \text{ع} \leftarrow \text{س}) \left(\text{جا} (\text{س} + \text{ص}) - \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} \right)$$

$$= (1 - \text{نهيا} \leftarrow \text{ع} \leftarrow \text{س}) \text{جا} (\text{س} + \text{ص}) \times \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} - \text{جاس} \times 1$$

$\therefore \text{ق} (\text{س}) = - \text{جاس}$



JO | ACADEMY.com

مثال ٣

إذا كان $\text{ق} (\text{س}) = \frac{\text{جتاس}}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq 0$ ، فجد $\text{ق} \left(\frac{\pi}{3} \right)$.

الحل

طبّق قاعدة مشتقة خارج قسمة اقترانين:

$$\text{ق} (\text{س}) = \frac{\text{س} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{س}} - (\text{جتاس})}{\text{س}^2} = \frac{\text{س} \times \text{جتاس} - \text{جتاس}}{\text{س}^2}$$

$$= \frac{\text{س} \text{جتاس} - \text{جتاس}}{\text{س}^2}$$

$$\text{ق} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\frac{\pi}{3} \times \text{جا} \frac{\pi}{3} - \text{جتا} \frac{\pi}{3}}{\left(\frac{\pi}{3} \right)^2} = \frac{\frac{\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{\pi}{3} \right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{\pi}{3} \right)^2}$$

مثال ٤

إذا كان $ص = أ جاس + ب جتاس$ ، $أ، ب \in \mathbb{C}$ ، فأثبت أن $ص = ٠$.

الحل

$$ص = أ جتاس - ب حاس$$

$$ص = - أ حاس - ب جتاس = - (أ جاس + ب جتاس)$$

$$أي أن ص = - ص ومنه ص = ص = صفرًا$$

تدريب ٢

إذا كان $ق(س) = س جاس$ ، فجد $ق\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

يمكنك استخدام القاعدتين ١، ٢ في إيجاد مشتقات الاقترانات المثلثية: $ظاس$ ، $قتاس$ ، $قاس$ ، $جتاس$.

مثال ٥

إذا كان $ق(س) = ظاس$ ، فأثبت أن $ق'(س) = قاس$.

البرهان

يمكنك كتابة الاقتران $ق$ بالصورة $ق(س) = \frac{جاس}{جتاس}$
طبق قاعدة القسمة في الاشتقاق.

$$ق'(س) = \frac{جتاس \times جتاس - جاس \times جتاس}{جتاس^2} = \frac{جتاس + جاس}{جتاس} = \frac{١}{جتاس} = قاس$$

تدريب ٣

استخدم القاعدتين (١)، (٢) في إثبات قواعد اشتقاق الاقترانات: $ظاس$ ، $قتاس$ ، $قاس$ كما في الجدول الآتي:

المشتقة: $ق'(س)$	الاقتران: $ق(س)$
قاس $ظاس$	قاس
- قتاس $ظتاس$	قتاس
- قتاس $ظتاس$	ظتاس

إذا كان $ق(س) = قتناس + ظتناس$ ، فأثبت أن $ق(س) = \frac{1}{جتاس - 1}$

البرهان

$$ق(س) = قتناس - ظتناس - قتناس^2 = \frac{1}{جتاس} - \frac{جتاس}{جتاس} \times \frac{1}{جتاس} = \frac{1}{جتاس} - \frac{جتاس}{جتاس^2}$$

$$= \frac{1 - جتناس}{جتاس^2}$$

$$= \frac{-(جتاس + 1)}{1 - جتناس^2}$$

$$= \frac{-(جتاس + 1)}{(1 - جتناس)(1 + جتناس)}$$

$$= \frac{1 - جتناس}{1 - جتناس}$$

$$= \frac{1}{1 - جتناس}$$



JO | ACADEMY.com

تدريب ٤

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

(١) جد $\frac{ص}{س}$ لكل من الاقترانات الآتية :

$$\begin{array}{ll} \text{أ) } ص = ٣ \text{ جاس} - \text{جتاس} & \text{ب) } ص = س^٢ \text{ جاس} \\ \text{ج) } ص = \frac{س}{\text{جتاس}} & \text{د) } ص = \sqrt[٣]{\pi} س - \text{ظاس} \\ \text{هـ) } ص = \text{جاس}^٢ + \text{جتاس}^٢ & \text{و) } ص = \text{قتاس} - س \text{ ظتاس} \end{array}$$

(٢) إذا كان $ص = \text{جاس}$ ، فجد $ص + ٦$ بدلالة $ص$.

(٣) جد $ق(س)$ لكل من الاقترانات الآتية عند قيمة $س$ المبينة إزاء كل منها :

$$\text{أ) } ق(س) = \text{جاس} - \text{جتاس} \quad ، \quad س = \frac{\pi}{٣}$$

$$\text{ب) } ق(س) = (\text{جاس} - س) + (\text{جتاس} - س) \quad ، \quad س = \frac{\pi}{٤}$$

$$\text{ج) } ق(س) = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس} + ١} \quad ، \quad س = \pi$$

$$\text{د) } ق(س) = س \text{ قاس} \quad ، \quad س = \frac{\pi}{٦}$$

$$\text{هـ) } ق(س) = \frac{\text{ظاس} + س}{\text{جاس}} \quad ، \quad س = \frac{\pi}{٣}$$

(٤) أثبت أن $كلاً$ من $ص = \text{جتاس}$ ، $ص = \text{جاس}$ يُعتبر حلاً للمعادلة $ص + ص = صفرًا$

(٥) جد قيم $س$ في الفترة $[-\pi/٢, \pi/٢]$ التي تحقق المعادلة $ق(س) = ٠$ في كل مما يأتي :

$$\text{أ) } ق(س) = س + \text{جتاس} \quad \text{ب) } ق(س) = \text{قاس}$$

(٦) جد $\frac{d^2v}{ds^2}$ لكل مما يأتي:

أ) $v = ct$ ب) $v = s - ct$ ج) $v = s - ct^2$

(٧) إذا كان $q(s) = \begin{cases} s \leq 0, & \text{جتاس} \\ s + b, & \text{أس + ب} \end{cases}$ ، $s > 0$

فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب التي تجعل الاقتران قابلاً للاشتقاق عند $s = 0$.

(٨) إذا كان $q(s) = |jas|$ ، $s \in [0, \pi/2]$ فابحث في قابلية الاقتران للاشتقاق عند $s = \pi$.

(٩) إذا كان $q(s) = jas - \frac{1}{s}$ ، $s \in [0, \pi/2]$ فجد قيمة (قيم) s التي تجعل المماس لمنحنى q أفقيًا.



$$\text{إذا كان } v = (s^3 - s^6), \text{ فجد } \frac{dv}{ds}$$

تعلمت سابقاً بعض قواعد الاشتقاق التي تمكنك من إيجاد مشتقات اقترانات بسيطة، مثل: مشتقة حاصل جمع، أو طرح، أو ضرب، أو قسمة اقترانين. في هذا الدرس ستتعلم إيجاد مشتقة صيغ لاقترانات مركبة.

تذكر

تركيب اقترانين

إذا كان q ، h اقترانين حيث $v = q(h)$ ، $e = h(s)$ وكان مدى h مجموعة جزئية من مجال q ، فإنه يمكن كتابة v على الصورة:
 $v = q(h) = q(e) = q(h(s))$ أو $(q \circ h)(s)$.

قاعدة

قاعدة السلسلة

إذا كان الاقترانان q ، h قابلين للاشتقاق عند s ، وكان الاقتران q قابلاً للاشتقاق عند $h(s)$ ، فيكون الاقتران المركب $(q \circ h)(s)$ قابلاً للاشتقاق عند s وإن:
 $(q \circ h)'(s) = q'(h(s)) \times h'(s)$.

في الشكل المجاور تجد أن:

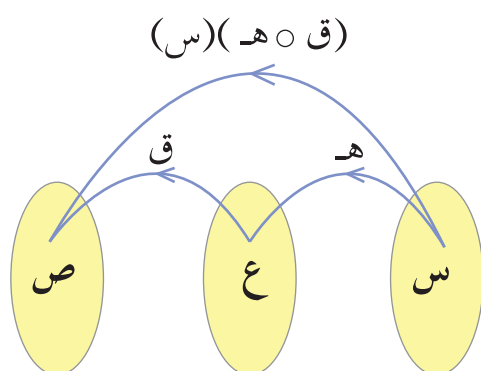
$$v = q'(e) \dots \dots \dots (1)$$

$$e = h'(s) \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{أي أن } v = q'(h(s)) = q'(e) = q'(h(s)) \times h'(s)$$

إن إيجاد $\frac{dv}{ds}$ يعني إيجاد مشتقة تركيب اقترانين أي أن:

$$\frac{dv}{ds} = (q \circ h)'(s) = q'(h(s)) \times h'(s)$$



حسب قاعدة السلسلة

$$= ق (ع) \times هـ (س) \dots\dots\dots (3) \quad \text{لأن } ع = هـ (س)$$

لكن ق (ع) = $\frac{ص}{ع}$ من العلاقة (1)، هـ (س) = $\frac{ع}{س}$ من العلاقة (2) بالتعويض في العلاقة (3) ينتج أن:

تعميم

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$$

وهذه صورة أخرى لقاعدة السلسلة.

مثال ١

$$\text{إذا كان } ص = (س^3 - 1)^{10} \text{ فجد } \frac{ص}{س}$$

الحل

يمكن حل المسألة باستخدام قاعدة السلسلة، حيث نكتب ص على صورة اقتران مركب متغيره (س) بفرض $ع = س^3 - 1$ ، فيصبح $ص = ع^{10}$ وباستخدام قاعدة السلسلة نحصل على

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س} = \frac{ص}{ع} \times 3س^2$$

$= 10ع^9 \times (3س^2) = 30س^2 ع^9$ ، عوض عن ع بدلالة س لتحصل على :

$$\frac{ص}{س} = 10(س^3 - 1)^9 \times 30س^2 = 300س^2(س^3 - 1)^9$$

مثال ٢

إذا كان ق (س) = $س^2$ ، هـ (س) = $س - 1$ ، فجد كلاً مما يأتي:

$$(1) \text{ ق } \circ \text{ هـ } (س)$$

$$(2) \text{ ق } \circ \text{ هـ } (1)$$

الحل

$$\text{ق } (س) = س^2 ، \text{ هـ } (س) = س - 1$$

$$(1) \text{ ق } \circ \text{ هـ } (س) = \text{ق } (س - 1) \times \text{ هـ } (س)$$

$$= (س - 1)^2 \times (س - 1) = (س - 1)^3$$

$$١٢ - ٧٢ = ٦ - \times (٦ - ١) ٢ =$$

$$(٢) (ق \circ هـ) (١) ٧٢ = ١٢ - ٦٠ =$$

مثال ٣

إذا كان ل (س) = ظا س^٣ ، فجد ل (س)

الحل

ابحث عن اقترانين ق ، هـ بحيث يكون ل = ق \circ هـ

بفرض هـ (س) = س^٣ ، ق (س) = ظا س^٣ ، فإن:

$$هـ (س) = (س) ٣ س٢ ، ق (س) = ق٢ س٢$$

$$ق (هـ (س)) = ق (ق (س) ٣ س٢) = ق٣ س٦$$

$$ل (س) = (س) = ق (هـ (س)) \times هـ (س) =$$

$$= ق٣ س٦ \times س٣ س٢$$

$$= (ق٣ س٦) (س٣ س٢) = ق٣ س٩ س٨$$

تدريب ١

(١) حل المسألة الواردة بداية الدرس.

(٢) إذا كان ق (س) = ٢ س + ١/س ، هـ (س) = جاس فجد (ق \circ هـ) (س)

من فوائد قاعدة السلسلة إيجاد مشتقة اقتران مرفوع لقوة مثل ص = (ل (س))^٥ ، ص = جانس

واقترانات أخرى مثل ص = جاهـ (س) إلخ

نتيجة

إذا كان ل (س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س ، وكان ص = (ل (س))^٥ ، حيث ن عدد

$$\text{صحيح ، فإن } \frac{د ص}{د س} = ٥ (ل (س))^{٥-١} \times ل (س)$$

البرهان

بفرض $ع = ل (س)$ ، ومنه $\frac{ع}{ل} = \frac{ع}{ل (س)}$

فيكون $ص = ع^{\text{ن}}$ ، ومنه $\frac{ص}{ع} = ن = ع^{\text{ن}} = ن(ل(س))^{\text{ن}}$

باستخدام قاعدة السلسلة ينتج أن: $\frac{دع}{دس} \times \frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس}$

$$\therefore \frac{Z_{ص}}{Z_{س}} = n (l(s)) \times 10^{-5} l(s)$$

مثال ۴

إذا كان $v = (v_1, \dots, v_n)$ ، n عدد صحيح موجب فيين أن $\frac{v_1}{v_n} = -n$ v قتاس.

الحل

$$\frac{دص}{دس} = ن(قتاس + ظتاس)^{-١} - (-قتاس\ ظتاس - قتاس^٢)$$

$$= n(\text{قتاس} + \text{ظتاس}) \times 10^{-1} - \text{قتاس}(\text{ظتاس} + \text{قتاس})$$

$$= n - n(\text{قتاس} + \text{ظتاس}) \times \text{قتاس}$$

ومنه $\frac{Z_v}{Z_s} = n - v$ قواسم.

تدریب ۲

(١) إذا كان $v = (qas + \phi as)^2$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عند $s = 0$.

مثال ۵

إذا كان $v = \text{ظا}^{\text{ءس}}$ ، فجاء $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

الخل

$$ص = (ظا س)^4$$

$$\frac{دص}{دس} = ٤(ظا س)٣(ظا س)$$

$$= \epsilon(\text{ظاس})^3 (\text{قاس}) = \epsilon\text{ظاس}^3 \text{قاس}$$

باستخدام النتيجة السابقة

مثال ٦

إذا كان ص = جتا (س + ٢)، فجد $\frac{ص}{كس}$.

الحل

بفرض ع = س + ٢، $\frac{كع}{كس} = س٢$ ،

ص = جتا ع، $\frac{كص}{كع} = -جا ع = -جا (س + ٢)$ ،

قاعدة السلسلة

$$\begin{aligned} \frac{كص}{كس} &= \frac{كص}{كع} \times \frac{كع}{كس} \\ &= -جا (س + ٢) \times س٢ \\ &= -س٢ جا (س + ٢) \end{aligned}$$

مثال ٧

إذا كان هـ (س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س وكان ص = جتا (هـ (س))، فأثبت أن :

$$\frac{كص}{كس} = هـ' (س) جتا (هـ (س))$$



JO ACADEMY.com

البرهان

بفرض ع = هـ (س)، ومنه $\frac{كع}{كس} = هـ' (س)$ ،

ص = جتا ع، ومنه $\frac{كص}{كع} = جتا ع = جتا (هـ (س))$ ،

قاعدة السلسلة

$$\frac{كص}{كس} = \frac{كص}{كع} \times \frac{كع}{كس}$$

$$= جتا (هـ (س)) \times هـ' (س) = هـ' (س) جتا (هـ (س)).$$

تعميم

إذا كان ع اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س، فيمكنك استخدام قاعدة السلسلة في إثبات صحة القواعد الآتية:

$$(٢) \frac{كص}{كس} (جتا ع) = -جا ع \times \frac{كع}{كس}$$

$$(١) \frac{كص}{كس} (جا ع) = جتا ع \times \frac{كع}{كس}$$

$$(٤) \frac{كص}{كس} (ظتا ع) = -قتا ع \times \frac{كع}{كس}$$

$$(٣) \frac{كص}{كس} (ظا ع) = قتا ع \times \frac{كع}{كس}$$

$$(٦) \frac{كص}{كس} (قتا ع) = -قتا ع \times \frac{كع}{كس}$$

$$(٥) \frac{كص}{كس} (قا ع) = قا ع \times \frac{كع}{كس}$$

مثال ٨

إذا كان $v = \text{جتا}^3(s) - 2(1 - s^2)$ فجد $\frac{dv}{ds}$

الحل

$$\frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds} (\text{جتا}^3(s) - 2(1 - s^2)) = 3\text{جتا}^2(s) \cdot (-2s) - 2(-2s) = -6s\text{جتا}^2(s) + 4s$$

$$= -6s(1 - s^2) + 4s = -6s + 6s^3 + 4s = 6s^3 - 2s$$

تدريب ٣

جد $q(s)$ لكل مما يأتي :

$$(2) \quad q(s) = (s^3 + s^2 - 8)^7$$

$$(1) \quad q(s) = 4s$$

$$(3) \quad q(s) = \text{جا}^2 s$$

مثال ٩

إذا كان $q(3s) = 6s^2 + 9s$ ، فجد $q(3)$

الحل

$q(3s)$ يُشكل تركيبًا لاقترايين

باشتقاق الطرفين :

$$q(3s) = 6s^2 + 9s \Rightarrow q(3) = 6(1)^2 + 9(1) = 15$$

ضع $s = 1$ فتحصل على $q(3)$

$$\therefore q(3) = 6(1)^2 + 9(1) = 15, \text{ ومنه: } q(3) = 3 + 12 = 15$$

مثال ١٠

إذا كان $h(s) = q(\text{حا}^2 s)$ وكان $q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8$ ، فجد $h\left(\frac{\pi}{4}\right)$

الحل

باشتقاق الطرفين نجد أن :

$$h(s) = q(\text{حا}^2 s) \Rightarrow h\left(\frac{\pi}{4}\right) = q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8$$

$$\text{هـ} \left(\frac{\pi}{6} \right) = 2 \times \text{جنا} \left(\frac{\pi}{3} \right) \text{ق} \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} \times \text{ق} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} \times 8 = 4$$

تدريب ٤

إذا كان ق (س^٣ - ١) = $\frac{1}{س} - س^٢$ ، فجد ق (٧)



JO | ACADEMY.com

(١) استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد $\frac{دص}{دس}$ في كل مما يأتي :

أ) $ص = (س^٣ - ٢س + ٤)^٨$ ب) $ص = \frac{١}{(س^٢ + ١)^٥}$

ج) $ص = \frac{س^٤}{(١ - س^٣)^٤}$ د) $ص = جتا(س^٢ - س)$

(٢) إذا كان ق(س) = $س^٢ - ٢س$ ، هـ(س) = $س^٣ + ١$ ، فجد كلاً مما يأتي :

أ) (ق ° هـ) (١) ب) (هـ ° ق) (١)

(٣) إذا كان ق، هـ اقترانين معرفين على ح وقابلين للاشتقاق على مجاليهما وكان هـ(٢) = ٣ ، ق(٣) = ٤ ، هـ(٢) = -٦ ، فجد كلاً مما يأتي :

أ) (ق ° هـ) (٢) ب) (ق(س) ° هـ) عند س = ٣

(٤) إذا كان هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س، وكان ص = جـ(هـ(س)) ، حيث ن عدد صحيح فأثبت أن :

$$\frac{دص}{دس} = ن جـ^{١-} (هـ(س)) جتا (هـ(س)) \times هـ'(س)$$

(٥) جد $\frac{دص}{دس}$ في كل مما يأتي :

أ) $ص = ظاع$ ، $ع = س^٣ - س$

ب) $ص = ل^٢ + ٢ل$ ، $ل = (س^٢ + ١)^٥$

(٦) إذا كان ص = جتا(س + $\frac{\pi}{٢}$) ، فأثبت أن : ص + ص' = ٠

(٧) إذا كان ص = ظا س + $\frac{١}{٣}$ ظا^٣ س ، فبرهن أن : $\frac{دص}{دس} = قاس$

٨ (جد $\frac{ص}{س}$ لكل من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كل منها :
 أ (ص = حا^٢ س ، س = $\frac{\pi}{9}$ (ب ص = $(\frac{1}{س} + س)$ ، س = ١

٩ (جد ص في كل مما يأتي :
 أ (ص = س ظا $(\frac{1}{س})$ (ب ص = $\frac{جتا٢س}{س}$

١٠ (إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان ق (حا^٢س) = قتا^٢س) حيث س $\in (\frac{\pi}{3}, 0)$ فجد ق $(\frac{1}{3})$.

١١ (إذا كان ص = ق (س^٢ + س^٢) ، ق^٣ = ٥ ، فجد $\frac{ص}{س}$ |
 س = ١

١٢ (إذا كان ق (س^٤) = $\frac{ص}{س}$ (س^٣ + ٣) ، فجد ق^٤ (٤).

١٣ (إذا كان ق (س) = س^٣ + س^٢ ، هـ (س) = س^٣ ، فجد كلاً مما يأتي :

أ (ق هـ) (١) (ب (ق هـ) (٢)

جـ (ق هـ) (١-) د (ق هـ) (٣)

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $s^2 + v^2 = 1$ عند النقطة $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

تعلمت سابقاً إيجاد مشتقات لاقرانات معطاة بصورة واضحة على الشكل $v = c(s)$

$$\left. \begin{array}{l} s^2 + v^2 = 1, \quad s \geq 0 \\ s^2 + v^2 = 1, \quad s < 0 \end{array} \right\} \text{ مثل } v = (1 + s^2)^{1/2}, \quad v = s^2 \text{ ظاس}, \quad v = 1 - s^2$$

وتُسمى اقترانات صريحة؛ لأن المتغير التابع (v) يظهر وحيداً في طرف والمتغير المستقل (s) في الطرف الآخر. في هذا الدرس سوف تجد مشتقات علاقات أو معادلات قد يصعب فيها فصل المتغير المستقل عن المتغير التابع، وتُسمى **بالعلاقات الضمنية**.

يمكنك الحصول على أكثر من اقتران من علاقة ضمنية واحدة؛ فمثلاً من العلاقة $s^2 + v^2 = 1$ يمكنك الحصول على $v = \pm \sqrt{1 - s^2}$ وهذه علاقة مكونة من اقترانين $v = \sqrt{1 - s^2}$ ، $v = -\sqrt{1 - s^2}$. في هذا الدرس سوف تتعرف كيفية إيجاد $\frac{dv}{ds}$ لعلاقات ضمنية.

لإيجاد $\frac{dv}{ds}$ لعلاقة ضمنية اتبع الخطوات الآتية:

- (١) اشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى s .
- (٢) جمّع الحدود التي تحوي $\frac{dv}{ds}$ في طرف، وباقي الحدود في الطرف الآخر.
- (٣) أخرج $\frac{dv}{ds}$ عاملاً مشتركاً.
- (٤) جد $\frac{dv}{ds}$ بإجراء عملية القسمة.

مثال ١

إذا كان $4v - s^2 + 8 = 0$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$

الحل

في هذا المثال يمكنك إيجاد $\frac{ص}{س}$ بطريقتين :

الطريقة الأولى : التعبير عن ص بدلالة س (إيجاد علاقة صريحة بين س، ص)

$$ص = \frac{س^2 - 8}{4} = \frac{1}{2}س - 2, \quad \frac{ص}{س} = \frac{1}{2}$$

الطريقة الثانية : اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س باستخدام قاعدة السلسلة.

$$4 \times \frac{ص}{س} - 2 = 0, \quad \text{منه } \frac{ص}{س} = \frac{1}{2}$$

مثال ٢

إذا كان $س^3 + ص^3 = 6س$ ، فأجب عن كل مما يأتي :

(١) جد $ص$.

(٢) جد ميل المماس المرسوم لمنحنى العلاقة عند النقطة (٣، ٣).

الحل

$$(١) \quad 3س^3 + 3ص^3 = 6س \Rightarrow 3س^2 + 3ص^2 = 2$$

$$3س^2 - 3ص^2 = 6س - 6ص \Rightarrow 3(س^2 - ص^2) = 6(س - ص)$$

$$3ص(س + ص) = 2(س - ص)$$

$$\frac{3ص(س + ص)}{3(س + ص)} = \frac{2(س - ص)}{3(س + ص)} \Rightarrow \frac{3ص}{3} = \frac{2(س - ص)}{3(س + ص)}$$

(٢) عندما $س = 3$ ، $ص = 3$

$$\frac{3ص}{3} = \frac{2(3 - 3)}{3(3 + 3)} \Rightarrow \frac{3ص}{3} = 0 \Rightarrow 3ص = 0 \Rightarrow ص = 0$$

مثال ٣

إذا كان $4ص^2 - 3ص = 2س$ ، فجد $ص$.

الحل

$$4 \times 2 - 3 \times 2 = 2س \Rightarrow 8 - 6 = 2س \Rightarrow 2 = 2س \Rightarrow س = 1$$

$$٨ ص ص - ص جتا ص = ٢ س$$

$$ص (٨ ص - جتا ص) = ٢ س$$

$$ص = \frac{٢ س}{٨ ص - جتا ص}$$

تدريب ١

جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

$$(٢) ٢ س ص - ص = ١ + ٣ ص$$

$$(١) ٣ س - ٤ ص = ٨$$

$$(٣) ٢ س + ص = ظا ص$$

يمكنك استخدام الاشتقاق الضمني لتعميم مشتقة $س^n$ ؛ عندما يكون $ن$ عددًا نسبيًا كما في النظرية الآتية:

نظرية

إذا كان $ص = س^n$ ، حيث $\frac{ص}{س}$ عدد نسبي فإن: $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} \cdot \frac{س}{س} = \frac{ص}{س} \cdot س^{-١}$

البرهان

ارفع طرفي المعادلة $ص = س^n$ إلى الأس $ن$ لتحصل على:

$ص^n = س^{n \cdot ن}$ ، ثم اشتق الطرفين ضمناً بالنسبة إلى $س$ لتحصل على:

$$ن ص^{ن-١} = \frac{ص}{س} \times س^{ن-١}$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص^{ن-١} \times س^{ن-١}}{ص^{ن-١} \times س^{ن-١}} = \frac{ص^{ن-١} \times س^{ن-١}}{ص^{ن-١} \times س^{ن-١}} = \frac{ص}{س}$$

$$\text{إذن } \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} \cdot س^{-١}$$

مثال ٤

إذا كان $ص^2 = س \frac{1}{2}$ ، $ص < ٠$ ، فجد $\frac{ص}{س}$ عند $س = ١٦$

الحل

$$٢ ص \times \frac{ص}{س} = س \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} س} = \frac{1}{س} = \frac{ص}{س}$$

عندما $س = ١٦$ تكون $ص = ٢$ وعليه تكون

$$\frac{1}{32} = \frac{1}{16 \sqrt{2} \times 4} = \frac{ص}{س}$$

نتيجة

إذا كان $ق(س)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند $س$ ، وكان $ص = ق(س)$ ، حيث $ن$ عدد نسبي، فإن $\frac{ص}{س} = ن(ق(س))^{ن-١} \times ق'(س)$

مثال ٥

إذا كان $ص = \sqrt[٢]{هـ(س)}$ ، وكان $هـ(س)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند $س$ فأثبت أن:

$$\frac{ص}{س} = \frac{هـ'(س)}{٢ \sqrt[٢]{هـ(س)}}$$

الحل

يمكنك التعبير عن $ص = \sqrt[٢]{هـ(س)}$ بالصورة $ص = (هـ(س))^{\frac{1}{2}}$ ، وبما أن $هـ(س)$ اقتران قابل للاشتقاق عند $س$ ، فيمكن تطبيق النتيجة السابقة لتحصل على :

$$\frac{ص}{س} = \frac{1}{2} \times (هـ(س))^{\frac{1}{2}-1} \times هـ'(س) = \frac{1}{2} \times (هـ(س))^{-\frac{1}{2}} \times هـ'(س)$$

$$\frac{هـ'(س)}{٢ \sqrt[٢]{هـ(س)}} = \frac{هـ'(س)}{(هـ(س))^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2} =$$

مثال ٦

إذا كان (س - ص) = س^٢، فجد $\frac{ص}{س}$ عند النقطة (١، ٠).

الحل

اشتق الطرفين بالنسبة إلى س لتحصل على :

$$٥(س - ص) = \left(\frac{ص}{س} - ١\right) س^٢$$

$$\frac{س^٢}{٥(س - ص)} = \left(\frac{ص}{س} - ١\right)$$

$$\frac{س^٢}{٥(س - ص)} - ١ = \frac{ص}{س}$$

$$\frac{٣}{٥} = \frac{٢}{٥} - ١ = \frac{١ \times ٢}{٥(٠ - ١)} - ١ = \left| \frac{ص}{س} \right|_{(٠, ١)}$$

تدريب ٢

جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

$$٠ = ص - س^٢$$

$$١ = \sqrt{ص} + جتا س$$

مثال ٧

إذا كان س = ظتا ٢ ص فأثبت أن ص - ص جا ٤ ص

الحل

اشتق الطرفين بالنسبة إلى س

$$١ = (-\cot^2 ٢ ص) (٢ ص)$$

$$ص = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢ \cot^2 ٢ ص} = \frac{١}{٢} \text{ جا } ٢ ص$$

$$ص = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} (٢ \text{ جا } ٢ ص) (جتا ٢ ص) (٢ ص)$$

$$= \frac{١}{٢} (جا ٤ ص) (٢ ص)$$

$$ص = ص - ص جا ٤ ص$$

٢ جاس جتا س = جا ٢ ص

تدريب ٣

إذا كان جتا ص = س ، ص $\in (0, \frac{\pi}{2})$ ، فأثبت أن :

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta}$$

مثال ٨

إذا كان ص = ن ، س = ن + ١ ، فجد $\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$ عند $\theta = 1$

الحل

قاعدة السلسلة

$$\frac{\cos \theta}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta}$$

لتجد $\frac{\cos \theta}{\cos \theta}$ جد أولاً $\frac{\cos \theta}{\cos \theta}$ ،

$$\frac{\cos \theta}{\cos \theta} = 1 \text{ ومنه } \frac{\cos \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{\cos \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{1} \times (\frac{1}{1}) = \frac{\cos \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \text{ ، عندما } \theta = 1$$

لأن الاشتقاق بالنسبة إلى س

تدريب ٤

إذا كان س = جا ٣ ، ص = جتا ٣ ، فجد $\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$ عند $\theta = \frac{\pi}{3}$

(١) جد $\frac{ds}{ds}$ لكل مما يأتي :

(ب) $\sqrt{s^2 + s^3} = s^2$

(أ) $16 = s^2 + 4s^2$

(د) $s = (s^2)^2$

(ج) $s^2 + s^2 = s^2$

(٢) جد $\frac{ds}{ds}$ لكل مما يأتي :

(ب) $16 = s^2 + 3s^2$

(أ) $s^2 = (s^2)^2$

(د) $s = \sqrt{s^2 + 2}$

(ج) $s = s^2 + s^2$

(٣) جد قيمة $\frac{ds}{ds}$ لكل من العلاقات الآتية عند النقط المبينة إزاء كل منها :

(أ) $s = 8 + s^2 + \pi$ ، $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

(ب) $s^2 - s^2 + s^2 = 2$ ، $(1, 1)$

(ج) $3 = \frac{2}{s} + \frac{4}{s}$ ، $(1, 4)$

(٤) إذا كان $s = (s^2 + s^2)$ جد s^2 ، فجد s .

(٥) جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{s} + \sqrt{s} = 3$ التي يصنع عندها المماس زاوية مقدارها 135° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(٦) جد $\frac{ds}{ds}$ لكل مما يأتي :

(ب) $\sqrt{s^3} + \sqrt{s^2} = s$

(أ) $\sqrt{s(1+s)} = s$

٧ (إذا كان $s = \text{جاص}$ ، فأثبت أن $v^2 = \text{ظاص قاص}$.

٨ (إذا كان v جتا $s^2 = s$ جا v^2 ، فجد $\frac{v}{s}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

٩ (إذا كان s ص $= \text{جاص}$ ، فأثبت أن: s ص $+ v^2 + s$ ص $= 0$.

١٠ (إذا كان v ص $= n^2 + 2n$ ، $\frac{v}{n} = \frac{v}{n}$ ، فجد $\frac{v}{n}$ عند $n = 1$.

١١ (إذا كان $s + v = \text{جاص}$ ، فأثبت أن:

$$(v^2 = \text{ظتا ص} - \text{قتاص})$$

١٢ (إذا كان $v = \text{جاص} + s$ ، فأثبت أن :

$$\frac{v^2}{s-1} = v + s$$



(١) إذا كان $ق(س) = ظاس$ وتغيرت $س$ من $س$ إلى $س + هـ$ ، فأثبت أن معدل التغير للاقتزان $ق$ يساوي:

$$\frac{قاس \times ظاه}{هـ (١ - ظاس \times ظاه)}$$

(٢) إذا كان $ق(س) = جا٢س$ ، فاستخدم تعريف المشتقة لإيجاد $ق'(\frac{\pi}{4})$.

$$(٣) \text{ ليكن } ق(س) = \left. \begin{array}{l} س٢ + س٢ + ٢ \\ [س] + ٤س \end{array} \right\} \text{ ، } ١ \geq س \geq ٠ ، ٣ \geq س \geq ١ ، \text{ جد } ق'(س) .$$

(٤) إذا كان $ل(س)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند $س = ١$ ، $ل(١) = ١$ ، $ل'(١) = ٢$ فجد $ق'(١ -)$ في كل مما يأتي :

$$أ) ق(س) = \sqrt{س + ٥} \times ل(س) \quad ب) ق(س) = \frac{ل(س)}{س - ٢}$$

$$ج) ق(س) = ل(س) - \frac{ل(س)}{س} \quad د) ق(س) = ظا\left(\frac{\pi}{٣}\right) ل(س)$$

(٥) أ) إذا علمت أن $ص = س ظاس$ ، فأثبت أن :

$$ص' = ٢ قاس (١ + ص)$$

ب) إذا كان $جا ص = س$ ، $|س| > ١$ ، فأثبت أن :

$$\frac{ص}{س} = \frac{١}{١ - س٢} ، \exists ص (٠, \frac{\pi}{٢})$$

(٦) إذا كان $ص = ن٢ - ٤ن$ ، $س = ٢ن - ٥$ ، فجد $\frac{ص'}{س'}$ عند $ن = ٦$

(٧) إذا كان $ق$ ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق ؛ بحيث كان هـ $ق(س) = ق(س)$ ،

$ق(س) = هـ(س) - هـ(س)$ ، وكان $ل(س) = هـ(س) + ق(س)$ ، فجد $ل'(س)$.

$$٨ (إذا كان ق(س) = \left. \begin{array}{l} (س+١)^٤ ، س \geq ٠ \\ (س-١)^٤ ، س < ٠ \end{array} \right\}$$

فأجب عن كلِّ مما يأتي :

- أ (جد ق(س) لجميع قيم س ، س ≠ ٠
ب) بين أن ق اقتران غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

$$٩ (إذا كان ص^٣ = ق(٤س-٢س) ، ق(٥) = ٤ ، ق(٥) = -٨ ، فجد \frac{دص}{دس} \Big|_{س=-١} .$$

$$١٠ (إذا كان ق(س) = جاهـ(س) ، هـ(١) = \frac{\pi}{٣} ، هـ(١) = ٠ ، هـ(١) = ٤ ، فجد ق(١) علمًا بأن ق، ق قابلان للاشتقاق .$$

$$١١ (إذا كان ق(س) = س^٣ + ٢س ، هـ(س) = ٣س^٢ ، فجد كلاً مما يأتي :
أ (ق(٥ هـ)) (٢) ب) (ق(٥ هـ)) (٢)$$

$$١٢ (إذا كان ل(س) = ق(هـ(س)) ، وكان هـ(١) = ٤ ، ل(١) = ٢ ، ق(٤) = -٥ ، فجد هـ(١)$$

$$١٣ (إذا كان ص = س هـ(س) ، وكان هـ(١-١) = ٦ ، هـ(١-١) = ٢ ، فجد \frac{دص}{دس} عند س = ١-$$

$$١٤ (إذا كان جا ص = ظا س ، فأثبت أن : ظا ص = \frac{ص}{٢ ق(ص) + ٢ ق(ص)}$$

$$١٥ (إذا كان ق(٣س-١) = \frac{١}{س^٢} - \frac{٢}{س} ، س ≠ ٠ ، فأثبت أن ق(٥) = \frac{١}{١٢}$$

$$١٦ (إذا كان جتا ص - س ص = ٢س ، فأثبت أن :$$

$$ص (س + جا ص) + ص (٢ + ص جتا ص) = ٠$$

$$١٧ (إذا كانت ص = أ جاس - ب جتاس ، أ ، ب ثابتان ، فأثبت أن :$$

$$(ص)^٢ + ص^٢ = أ^٢ + ب^٢$$

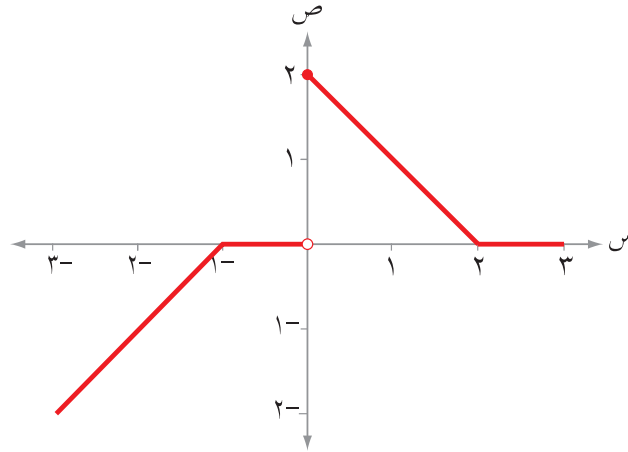
$$١٨ (إذا كان ص^٣ = ق(٢س-٢س) ، ق(٦) = ٤ ، ق(٦) = -٨ ، فجد \frac{دص}{دس} عند س = ٢ .$$

١٩) إذا كان $ق(س) = س^٢ - س^٣$ ، هـ $(س) = س^٣ + س$ ، فجد كلاً مما يأتي:

- أ) $(ق \circ هـ)^{(١)}$ ب) $(ق \circ هـ)^{(١)}$

٢٠*) اعتماداً على الشكل (٢-٤) الذي يمثل منحنى الاقتران $ق$ في الفترة $[٣-، ٣]$ ، جد كلاً مما يأتي:

- أ) قيم $س$ حيث $٣- > س > ٣$ التي يكون عندها الاقتران $ق$ غير متصل.
ب) قيم $س$ حيث $٣- > س > ٣$ التي يكون عندها الاقتران $ق$ غير قابل للاشتقاق.



الشكل (٢-٤)

٢١) يتكون هذا السؤال من (٨) فقرات من نوع الاختيار من متعدد، ويلي كل فقرة أربعة بدائل واحد فقط منها صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان منحنى الاقتران $ق$ يمر بالنقطة $(٢، ٣)$ ، وكان المماس المرسوم لمنحنى $ق$ عند هذه النقطة يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فإن:

نهـ $\frac{ق(س) - ٣}{س - ٦}$ تساوي:

- أ) ١ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٣} -$ د) $٣ -$

(٢) نهـ $\frac{جا٢س - ١}{س - \frac{\pi}{٤}}$ تساوي:

- أ) ١ ب) صفر ج) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ د) $\sqrt{٢}$

(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

(٣) نهيا $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} \text{جتا} + \frac{\pi}{3} \text{هـ}$ تساوي:

أ ($\frac{1}{2}$) ب ($\frac{1}{2}$) ج ($\frac{3}{2}$) د ($\frac{3}{2}$)

(٤) إذا كان ق (٢) = ٦ ، فإن نهيا $\frac{ق(٢+٣هـ) - ق(٢)}{هـ}$ تساوي:

أ (١٨ -) ب (١٨) ج (٦ -) د (٢ -)

(٥) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [٢-، م] يساوي

$\frac{٤ - ٢م}{٢ + م}$ فإن ق (٢) تساوي:

أ (٢) ب (صفر) ج (٤ -) د (٤)

(٦) إذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي

س هـ + س هـ + $\frac{١}{٣}$ هـ ، فإن ق (٣) تساوي:

أ (٩) ب (٩ -) ج (صفر) د (٣ -)

(٧) إذا كان ق(س) = $|٢ - ٤س|$ فإن ق (٢):

أ (٢) ب (٢ -) ج (صفر) د (غير موجودة)

(٨) إذا كان ق(٤) = ٥ ، ق(٤) = ١ - ، ق(٤) = ٢ ، فإن $\frac{ق}{ق} (٤)$ تساوي:

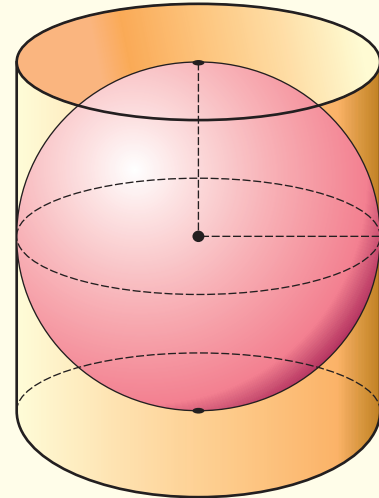
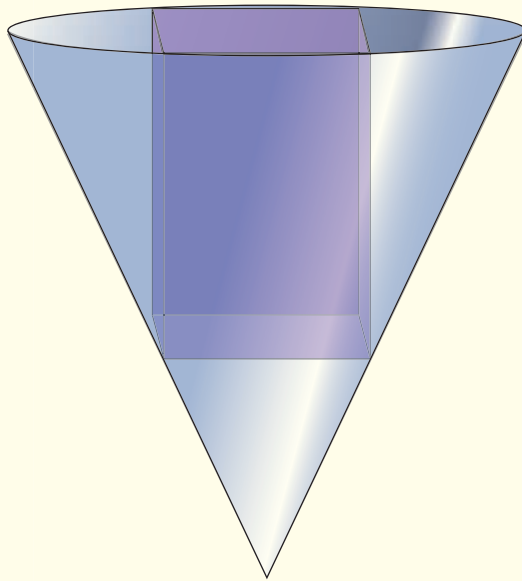
أ (١١) ب (٩ -) ج (٦ -) د (٦)



تطبيقات التفاضل

Applications of Differentiation

تم توظيف علم التفاضل في مجالات متعددة تخدم العلوم الأخرى، كعلوم الفيزياء والكيمياء وعلوم الفضاء والاقتصاد والصناعات. وتضم دراسة خصائص الاقترانات، من حيث نهاياتها واتصالها ومجالات تزايدها وتناقصها ومجالات تقعرها، كذلك تم توظيف المعادلات التفاضلية في مجالات الاتصالات والمركبات الفضائية وفي المجالات العسكرية، كما تم توظيفها في العلوم الحياتية والسكانية.



يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادراً على:

- إيجاد معادلة المماس عند نقطة.
- حل مسائل هندسية على المشتقة الأولى.
- حل مسائل عملية على المسافة، والسرعة، والتسارع.
- تفسير مفهوم المعدل الزمني.
- حل مسائل وتطبيقات حياتية على المعدلات المرتبطة بالزمن.
- بيان العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران، ومجالات التزايد والتناقص له.
- استخدام اختبار المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى.
- تحديد النقط الحرجة لاقتران معطى.
- بيان العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران، والقيم القصوى المحلية له.
- استخدام اختبار المشتقة الأولى في إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة لاقتران معطى، إن وجدت.
- استخدام اختبار المشتقة الثانية في تحديد فترات التقعر إلى الأعلى وإلى الأسفل، ونقط الانعطاف، والقيم القصوى.
- حل مسائل عملية تتضمن القيم القصوى.

تطبيقات هندسية وفيزيائية

Geometric and Physical Applications

الفصل الأول

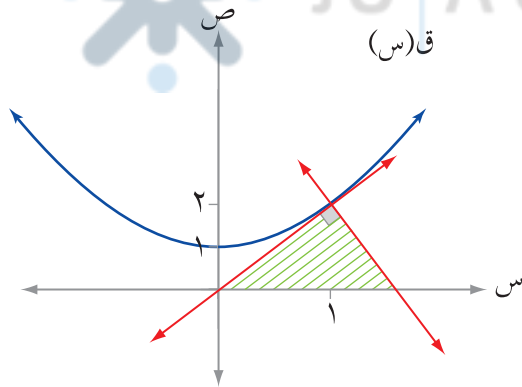
النتائج

- تجد معادلة المماس عند نقطة.
- تحل مسائل هندسية على المشتقة الأولى.
- تحل مسائل عملية على المسافة، والسرعة، والتسارع
- تفسر مفهوم المعدل الزمني.
- تحل مسائل وتطبيقات حياتية على المعدلات المرتبطة بالزمن.

تطبيقات هندسية

أولاً

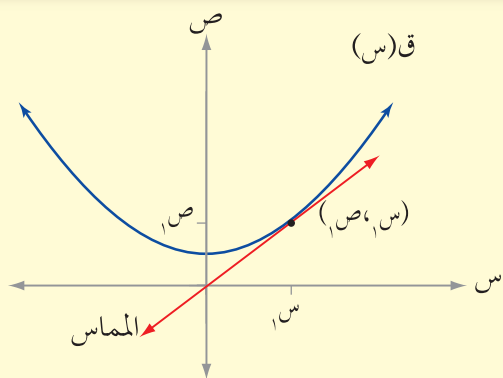
Geometrical Applications



الشكل (١-٣)

جد مساحة المثلث الناتج عن تقاطع محور السينات والمماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^2 + ١$ عند النقطة $(١, ٢)$.
انظر الشكل (١-٣).

تعلمت سابقاً أنّ ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق(س)$ عند النقطة $(س_١, ق(س_١))$ يساوي المشتقة الأولى للاقتران $ق$ عند تلك النقطة.
أي أنّ ميل المماس عند $(س_١, ق(س_١)) = ق'(س_١)$ ، وتسمى النقطة $(س_١, ق(س_١))$ **نقطة تماس**.



الشكل (٢-٣)

بشكل عام إذا كان للاقتران $ص = ق(s)$ مشتقة عند النقطة $(s_1, ص_1)$ ، فعندئذ يكون لمنحنى $ق$ مماس عند تلك النقطة، ميله يساوي $ق'(s_1)$. وتكون معادلة مماسه هي:

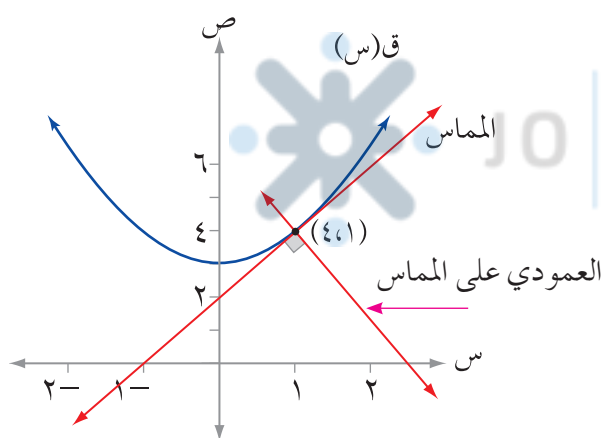
$$ص - ص_1 = ق'(s_1)(s - s_1)$$

انظر الشكل (٢-٣).

مثال ١

إذا علمت أن $ق(s) = s^2 + 3$ ، جد معادلة كل من المماس، والمستقيم العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $ق$ عند النقطة $(1, 4)$.

الحل



الشكل (٣-٣)

(١) معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ق(s) = s^2 + 3$ عند النقطة $(1, 4)$ هي:

$$ص - 4 = ق'(1)(s - 1)$$

$$ق'(s) = 2s, \text{ ومنه } ق'(1) = 2$$

إذن معادلة المماس هي: $ص - 4 = 2(s - 1)$

$$\text{ومنه } ص = 2s + 2$$

(٢) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, 4)$ هي:

$$ص - 4 = \frac{-1}{ق'(1)}(s - 1)$$

$$ص - 4 = \frac{-1}{2}(s - 1)$$

$$\text{ومنه } ص = \frac{-1}{2}s + \frac{9}{2}$$

انظر الشكل (٣-٣).

تذكر

- (١) ميل المستقيم $\times$ ميل العمودي عليه $= -1$
- (٢) المستقيم العمودي على منحنى اقتران عند نقطة هو نفسه العمودي على مماس منحنى الاقتران عند هذه النقطة.

تدريب ١

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = \sqrt{س+٣}$ عند النقطة $(١, ٢)$.

ملاحظة

يكون مماس لمنحنى الاقتران $ق(س)$ عمودياً على مماس لمنحنى الاقتران $هـ(س)$ عند نقطة تقاطعهما $(س_١, ص_١)$ ، إذا كانت $ق(س_١)$ ، $هـ(س_١)$ موجودتين، وكانت $ق(س_١) \times هـ(س_١) = ١ -$

مثال ٢

إذا كان $ق(س) = س^٢$ ، $هـ(س) = س^٢ - ٢س + ١$ ، فجد النقطة التي يكون عندها مماساً منحنىي الاقترانين $ق$ ، $هـ$ متعامدين.

الحل



$$ق(س) = س^٢، هـ(س) = س^٢ - ٢س + ١ \quad (لماذا؟)$$

$$ق(س) \times هـ(س) = ١ -$$

$$٢س(س^٢ - ٢س + ١) = ١ -$$

$$أي أن ٤س^٢ - ٤س + ١ = ٠$$

$$ومنه (٢س - ١) = ٠، ومنه س = \frac{١}{٢}$$

$$لاحظ أن ق(\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٤}، هـ(\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٤}$$

إذن النقطة التي يكون عندها مماساً منحنىي الاقترانين متعامدين هي $(\frac{١}{٢}, \frac{١}{٤})$.

تدريب ٢

بيّن أن مماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{٤}{س}$ ، ومماس لمنحنى الاقتران $هـ(س) = س$ متعامدان عند نقطة تقاطع المنحنيين.

مثال ٣

بيّن أن لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^2 - ٦س + ١٢$ مماسًا أفقيًا عند النقطة $(٣, ٣)$.

الحل

المماس الأفقي هو:
المماس الذي يوازي محور السينات
ويكون ميله يساوي صفرًا.

ميل المماس عند النقطة $(س_١, ص_١)$ هو $ق'(س_١)$ ،

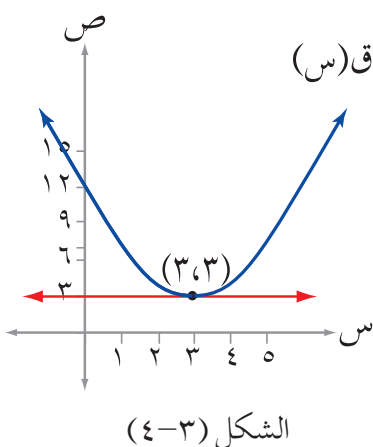
$$ق'(س) = ٢س - ٦$$

$$ق'(٣) = ٢ \times ٣ - ٦$$

$$= \text{صفرًا}$$

إذن لمنحنى $ق$ مماس أفقي عند النقطة $(٣, ٣)$.

انظر الشكل (٣-٤).



تدريب ٣

بيّن أن لمنحنى الاقتران $ق(س) = جاس$ مماسًا أفقيًا في الفترة $[٠, \pi]$

مثال ٤

إذا كان مماس منحنى الاقتران $ق(س) = س^2 + ٣س + ١$ عند $س = س_١$ يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فجد إحداثيي نقطة التماس.

الحل

$$ق'(س_١) = \text{ظا } ٤٥^\circ$$

$$٢س_١ + ٣ = ١$$

$$س_١ = -١$$

إذن نقطة التماس هي: $(س_١, ق(س_١)) = (-١, -١)$

ميل المستقيم (المماس) = ظا هـ
حيث هـ الزاوية التي يصنعها
المماس مع الاتجاه الموجب لمحور
السينات

تدريب ٤

إذا كان الاقتران $ق(س) = ج س^2 + ج س + ٢$ ، وكان قياس زاوية ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق$ عند النقطة $(٢، ق(٢))$ هو ١٣٥° ، فجد قيمة الثابت $ج$.

مثال ٥

جد الإحداثي السيني للنقط التي يكون عندها المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٤ - س^٤ + ٤$ موازياً للمستقيم الذي معادلته $ل: ص + ٤س + ١ = ٠$.

الحل

افرض أن ميل المماس $م$ ، و ميل المستقيم $م_١$.
والنقطة $(س_١ ، ص_١)$ نقطة التماس لمنحنى الاقتران $ق$.

$$إذن م = ق'(س_١) = ٤س_١^٣ - ٤س_١$$

وبما أن مماس منحنى الاقتران $ق$ عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ يوازي المستقيم $ل$ ، إذن:

$$م = م_١$$

$$٤س_١^٣ - ٤س_١ = -٤$$

$$٤س_١^٣ - ٤س_١ + ٤ = ٠$$

$$٤(س_١ - ١)(س_١^٢ + س_١ + ١) = ٠$$

$$ومنه س_١ = ١$$

$$أو س_١ = \frac{-١ + \sqrt{٥}}{٢}$$

$$أو س_١ = \frac{-١ - \sqrt{٥}}{٢}$$

مثال ٦

بين أن لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٢ + ١$ مماسين مرسومين من النقطة $(٠ ، ٠)$ ، ثم جد معادلة كل منهما .

الحل

النقطة $(0, 0)$ لا تقع على منحنى الاقتران ق، لماذا؟

افرض أن النقطة (s_1, v_1) نقطة تماس تقع على منحنى الاقتران ق.

$$\text{ومنه } v_1 = s_1^2 + 1$$

ميل المماس عند نقطة التماس = ميل منحنى الاقتران ق عند تلك النقطة.

ميل المماس = ق'(s) عند نقطة التماس

$$2s_1 =$$

معادلة المماس هي: $v = s_1^2 + 1$ (س-0)

$$v = s_1^2 + 1$$

$$v = (s_1) = v_1$$

$$\text{ومنه } s_1^2 + 1 = v_1$$

$$\text{ومنه } s_1^2 = v_1 - 1$$

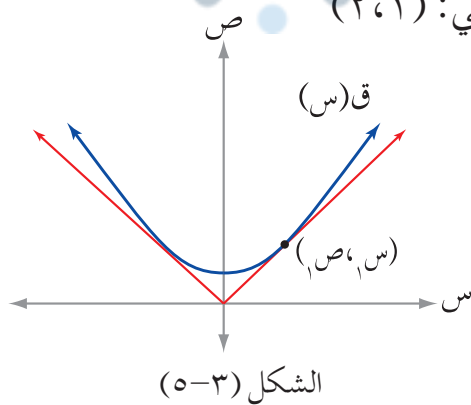
أي أن قيم s_1 هي: $1, -1$

نقطة التماس الأولى هي: $(-1, 2)$ ، نقطة التماس الثانية هي: $(1, 2)$

انظر الشكل (٣-٥).

∴ معادلة المماس الأول هي: $v = s_1^2 - 5$

معادلة المماس الثاني هي: $v = s_1^2 + 5$



تدريب ٥

بيّن أن لمنحنى الاقتران ق(س) = $s^2 - 5$ ، مماسين مرسومين من النقطة $(0, 3)$ التي لا تقع عليه.

تمارين ومسائل

- ١ (جد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^٢ + ٦س - ٥ عند النقطة (١ ، ٢).
- ٢ (جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^٣ ، عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص - س - ٦ = ٠
- ٣ (جد النقط الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) = س^٢ - ٣س + ٣ التي يصنع عندها المماس زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
- ٤ (جد النقط الواقعة على منحنى العلاقة (ص - ٤) = س^٢ + ٢ التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم الذي معادلته: ٣س + ٦ص + ٢ = ٠
- ٥ (جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^٢ - ٤س + ٣ بحيث يكون المماس عمودياً على المستقيم الذي معادلته: ٦ص - ٣س - ٥ = ٠
- ٦ (جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٢}{س}$ عند النقطة (١ ، ٢)
- ٧ (جد قيمة كل من الثابتين ب، ج اللتين تجعلان المستقيم الذي معادلته: ص - س - ٢ = ٠ مماساً لمنحنى الاقتران ق(س) = س^٢ + ب س + ج عند النقطة (٠ ، ٢).
- ٨ (إذا كان المستقيم ٢س - ص + ج = ٠ يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٢-}{س}$ عند النقطة (س_١، ص_١) فجد قيم الثابت ج.
- ٩ (جد معادلتى المماسين لمنحنى العلاقة س = ص^٢ - ٤ص عند نقطتي تقاطع منحناها مع محور الصادات.
- ١٠ (جد قياس الزاوية التي يصنعها مماس منحنى العلاقة: ص^٢ + س^٢ + ٦ص - ٢س + ٢ = ٠ عند النقطة (٣ ، -١) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
- ١١ (جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣ظتا س + قا^٢ س عند $س = \frac{\pi}{4}$.

١٢) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $Q(s) = \sqrt{s}$ عند نقطة تماسه مع منحنى الاقتران

$$H(s) = s^2 - \frac{3}{2}s + \frac{3}{2}.$$

١٣) جد مساحة المثلث القائم الزاوية، المكون من المماس المرسوم لمنحنى العلاقة

ص $= \sqrt{s}$ ، $s < 0$ عند النقطة $(2, 4)$ ومحور السينات والمستقيم $s = 4$.

١٤) حُلّ المسألة الواردة بداية الدرس.



قُذف جسم من سطح برج رأسياً إلى أعلى، حيث إن ارتفاعه بالأمتار عن سطح البرج بعد n ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة $f(n) = 25n - 5n^2$ ، جد ارتفاع البرج إذا كانت سرعة الجسم لحظة وصوله الأرض تساوي (-55 م/ث) .

تعلمت سابقاً أن السرعة المتوسطة $\bar{v}$ في الفترة الزمنية من n إلى $n + \Delta n$ لجسيم يتحرك على خط مستقيم، وفق العلاقة $L = f(n)$ هي:

$$\bar{v} = \frac{\Delta f}{\Delta n} = \frac{f(n + \Delta n) - f(n)}{\Delta n}, \text{ وإذا كانت نهياً } \frac{\Delta f}{\Delta n} \text{ موجودة فتسمى السرعة اللحظية للجسيم عند } n \text{ ويرمز لها بالرمز } v.$$

تعريف

إذا تحرك جسيم على خط مستقيم وتحدد موقعه في اللحظة n بالعلاقة $L = f(n)$ فإن:
السرعة اللحظية (السرعة) في اللحظة n هي v حيث $v = f'(n)$
وإذا كان $f'(n)$ قابلاً للاشتقاق في n ، فإن $f''(n) = \bar{a}$ يسمى تسارع الجسيم في اللحظة n ويرمز له بالرمز a .

مثال ١

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة $f(n) = 3n^3 - 2n^3 + 3$ ، حيث n الزمن بالثواني،
ف المسافة بالأمتار، احسب سرعة الجسيم وتسارعه عند $n = 4$ ثوانٍ.

الحل

$$\begin{aligned} \text{السرعة } v &= f'(n) = 9n^2 - 6n = 36 - 24 = 12 \text{ م/ث} \\ \text{التسارع } a &= f''(n) = 18n - 6 = 72 - 6 = 66 \text{ م/ث}^2 \\ \text{ومنه } a &= 66 \text{ م/ث}^2 \end{aligned}$$

تدريب ١

إذا كانت $f(n) = 4n^3 - 5n^2$ ، حيث f المسافة بالأمتار، n الزمن بالثواني،
فاحسب كلاً من المسافة و السرعة و التسارع عندما $n = \frac{\pi}{6}$ ثانية.

مثال ٢

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة $f(n) = n^3 - 6n^2 + 1$ ، حيث n الزمن بالثواني،
ف المسافة بالأمتار، جد سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه.

الحل

$$\text{السرعة } v(n) = f'(n) = 3n^2 - 12n$$

$$\text{التسارع } a(n) = v'(n) = 6n - 12$$

$$\text{عندما ينعدم تسارعه فإن } a(n) = 0$$

$$\therefore 0 = 6n - 12$$

ومنه $n = 2$ ، أي ينعدم تسارع الجسيم عندما $n = 2$ ثانية.

$$\text{إذن } v(2) = 3(2)^2 - 12(2) = -6 \text{ م/ث.}$$

تدريب ٢

إذا كانت $f(n) = n^3 - 9n^2 + 10n$ ، هي العلاقة الزمنية لحركة جسيم على خط مستقيم، حيث
 n الزمن بالثواني، ف المسافة بالأمتار، فجد تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته.

مثال ٣

قذف جسم رأسياً للأعلى من نقطة على سطح الأرض، بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض
بالأمتار بعد n ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة $f(n) = 30n - 5n^2$ ، جد كلاً مما يأتي:

(١) السرعة الابتدائية للجسم.

(٢) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

(٣) اللحظة التي تكون عندها سرعة الجسم ١٠ م/ث.

(٤) الزمن اللازم حتى يعود الجسم إلى سطح الأرض.

الحل

- (١) السرعة الابتدائية (ع.) للجسم هي السرعة التي قذف بها الجسم أي عندما (ن=٠)
 ع(ن) = ٣٠ - ١٠ ن ومنه ع. = ٣٠ م/ث
 (٢) يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع عندما تصبح السرعة ع = ٠، أي أن ٣٠ - ١٠ ن = ٠، ويتحقق ذلك عندما ن = ٣ ث، وعند هذه اللحظة تكون المسافة المقطوعة ف(٣) = ٩٠ - ٤٥ = ٤٥ م.
 (٣) ع = ٣٠ - ١٠ ن = ١٠، ومنه ن = ٢ ثانية
 (٤) عندما يعود الجسم إلى سطح الأرض تكون ف = ٠ ومنه ٣٠ - ١٠ ن = ٠، ومنه ن = ٣ ث
 ن (٣٠ - ١٠ ن) = ٠، ومنه ن = ٣ ث، ومنه ن = ٣ ث
 وبما أن ن = ٠ هي لحظة الانطلاق، إذن يعود الجسم إلى سطح الأرض بعد ٦ ثوانٍ من بدء الحركة.

تدريب ٣

حل المسألة الواردة بداية الدرس.

مثال ٤

أسقط جسم من ارتفاع ١٢٠ م عن سطح الأرض سقوطاً حراً؛ حيث إن المسافة المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية هي ف_١(ن) = ٥ ن^٢ وفي الوقت نفسه قذف جسم من سطح الأرض للأعلى حيث إن المسافة التي يقطعها هي ف_٢(ن) = ٦٠ ن - ٥ ن^٢، جد اللحظة التي يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الأرض.

الحل

يكون الجسمان على الارتفاع نفسه عن سطح الأرض عندما ف_١(ن) + ف_٢(ن) = ١٢٠ م

$$٥ ن^٢ + ٦٠ ن - ٥ ن^٢ = ١٢٠$$

$$٦٠ ن = ١٢٠$$
 ومنه ن = ٢ ثانية
 أي أن الجسمين يكونان على الارتفاع نفسه بعد ثانيتين من بدء حركتهما.

(١) يتحرك جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = $3 - 2n + 9n + 3$ ، حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة المقطوعة بالأمطار، فجد كلاً مما يأتي:

- أ (السرعة الابتدائية للجسيم.
ب) تسارع الجسيم لحظة سكونه.

(٢) يتحرك جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = $2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}n$ ،

ن $\in [0, \frac{\pi}{2}]$ حيث ف: المسافة بالأمطار، ن: الزمن بالثواني، جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته $\sqrt{3}$ م/ث.

(٣) قذف جسم رأسياً إلى الأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث كان بعده عن سطح الأرض بعد ن ثانية هو ف(ن) = $6, 9n - 4, 9n^2$ متر، فجد كلاً مما يأتي:

- أ (أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عن سطح الأرض.
ب) تسارعه في اللحظة ن.
ج) سرعة الجسم لحظة وصوله إلى سطح الأرض.

(٤) قذف جسم رأسياً إلى الأعلى من نقطة على سطح الأرض؛ بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بعد زمن ن ثانية هو ف(ن) = $8 - 12n + 16n^2$ قدم، فجد كلاً مما يأتي:

- أ (مجموعة قيم ن التي تكون عندها السرعة سالبة.
ب) أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عن سطح الأرض.
ج) تسارع الجسم عند أي لحظة.
د (سرعة الجسم الابتدائية.

(٥) قُذِفَ جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض؛ بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بالأقدام بعد ن ثانية معطى وفق العلاقة ف(ن) = $96 - 16n^2$. جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٨٠ قدماً.

٦) قذف جسم رأسياً إلى الأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث إن بعده عن نقطة القذف بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة $f(n) = ٥n^2 - ٨٠$ بالأمتر، فجد قيمة $f(٨)$ علماً بأن أقصى ارتفاع وصل اليه الجسم ٨٠ متراً.

٧) قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على ارتفاع ٦٠ متراً من سطح الأرض وفق العلاقة $f(n) = ٤٠n - ٥n^2$ حيث n الزمن بالثواني، ف المسافة بالأمتر، جد كلاً مما يأتي:

أ) الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود إلى نقطة القذف.

ب) الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود إلى سطح الأرض.

ج) أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عن سطح الأرض.

د) متى تصبح سرعه الجسم ٣٠ م/ث؟

هـ) متى يصبح ارتفاع الجسم ١٣٥ متراً عن سطح الأرض؟

٨) أسقط شخص جسمًا من السكون من سطح بناية وفق العلاقة $f(n) = ١٦n^2$ ، وفي اللحظة نفسها قذف شخص ثانٍ جسمًا عمودياً إلى أسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠ قدم/ث من السطح نفسه وفق العلاقة $f(n) = ٢٠n + ١٦n^2$ ، فإذا ارتطم الجسم الأول بعد $\frac{1}{٣}$ ثانية من ارتطام الجسم الثاني بالأرض، فجد ارتفاع البناية.

٩) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته $E = \sqrt{A}$ ، $A < ٠$ ، $F < ٠$ ، ف: المسافة بالأمتر، إذا علمت أن تسارعه ٨ م/ث^٢. فجد قيمة الثابت A .

١٠) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $E^2 = ١ - ٢F$ حيث E السرعة، ف المسافة بالأمتر. جد تسارع الجسيم عندما تنعدم سرعته.

أطلق صاروخ عمودياً لأعلى بسرعة ١٠٠ م/ث، وعلى بعد ٢٠٠ متر من نقطة انطلاق الصاروخ، كان مشاهد جالساً على الأرض ينظر إلى الصاروخ، جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد عندما يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠٠ متر من سطح الأرض.

تعلمت سابقاً أن $\frac{ds}{dt}$ هو معدل تغير s بالنسبة للمتغير t في حالة ارتباط s بالمتغير t ، غير أن هناك حالات أخرى كثيرة فيها ارتباط بين عدة متغيرات، وكلُّ منها له علاقة بالزمن ويعبر عنها بالصيغ التالية:

$\frac{ds}{dt}$ معدل تغير s بالنسبة إلى الزمن t .

$\frac{ds}{dt}$ معدل تغير s بالنسبة إلى الزمن t .

تسمى هذه العلاقات **بالمعدلات المرتبطة بالزمن**، ولها تطبيقات فيزيائية وحياتية متنوعة.

مثال ١

تحرك نقطة على منحنى العلاقة $s^2 + 3s - 5t = 0$ ، فإذا كان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة إلى الزمن t سم/ث عند النقطة $(1, 2)$ ، فجد معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة إلى الزمن عند النقطة نفسها.

الحل

افرض أن النقطة (s, t) تقع على منحنى العلاقة.

المعطيات: $\frac{ds}{dt} = 3$ سم/ث، عند النقطة $(1, 2)$.

المطلوب: $\frac{ds}{dt}$ عند النقطة $(1, 2)$.

وللحصول على علاقة تربط بين المعدلات $\frac{ds}{dt}$ ، $\frac{ds}{dt}$ اشتق طرفي المعادلة ضمناً بالنسبة إلى الزمن فتحصل على:

$$٢س \frac{كس}{زن} + ٢ص \frac{كس}{زن} - ٥ \frac{كس}{زن} + ٣ \frac{كس}{زن} = ٠$$

$$٠ = \frac{كس}{زن} (٥ - ٢س) + \frac{كس}{زن} (٣ + ٢ص)$$

$$\frac{كس}{زن} \times \frac{٥ - ٢س}{٣ + ٢ص} = \frac{كس}{زن} \quad \text{لماذا؟}$$

وبتعويض $\frac{كس}{زن} = ٣$ ، $س = ١$ ، $ص = ٢$ نجد أن:

$$\frac{كس}{زن} = ٣ \times \frac{٣}{٧} = \frac{٩}{٧} \text{ سم/ث}$$

أي أن معدل التغير في الإحداثي الصادي عند النقطة (١، ٢) يساوي $\frac{٩}{٧}$ سم/ث.

مثال ٢

قرص معدني دائري الشكل يتمدد بالحرارة محافظاً على شكله، تزداد مساحة سطحه بمعدل $٦ \text{ سم}^٢/\text{ث}$ ، جد معدل تغير طول نصف قطر القرص؛ عندما يكون طول نصف قطره ٣ سم .

الحل

افرض أن:  **نق** = طول نصف قطر القرص في اللحظة ن.

م = مساحة سطح القرص في اللحظة ن.

المعطيات: $\frac{كم}{زن} = ٦ \text{ سم}^٢/\text{ث}$

المطلوب: $\frac{كنق}{زن}$ عندما $نق = ٣ \text{ سم}$.

العلاقة التي تربط بين متغيرات المسألة م، نق هي:

$$م = \pi \text{ نق}^٢ \quad (١)$$

وباشتقاق طرفي العلاقة (١) ضمناً بالنسبة إلى الزمن نحصل على:

$$\frac{كم}{زن} = ٢ \pi \text{ نق} \frac{كنق}{زن} \quad (٢)$$

وبالتعويض عن $\frac{كم}{زن} = ٦ \text{ سم}^٢/\text{ث}$ ، $نق = ٣ \text{ سم}$ في العلاقة (٢) نجد أن:

$$٦ \text{ سم}^٢/\text{ث} = \pi \times ٢ \times ٣ \text{ سم} \times \frac{كنق}{زن}$$

ومنه $\frac{دق}{دس} = \frac{١}{\pi} \text{ سم/ث}$
أي أنّ طول نصف قطر القرص يزداد بمعدل $\frac{١}{\pi} \text{ سم/ث}$.

تدريب ١

كرة من الجليد تنصهر بسبب الحرارة بحيث تبقى محافظة على شكلها، إذا كان طول نصف قطرها يتناقص بمعدل $٠,٠١ \text{ سم/ث}$ ، فجد كلاً مما يأتي:

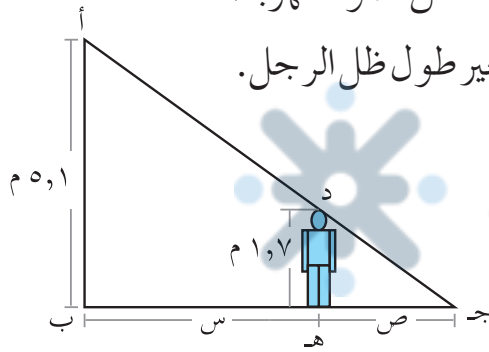
(١) معدل تناقص حجم الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ١٠ سم .

(٢) معدل تناقص مساحة سطح الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ٥ سم .

مثال ٣

رجل طوله $١,٧$ متراً، يسير على أرض مستوية بسرعة ٢ م/ث مبتعداً عن عمود كهرباء في قمته مصباح، يرتفع $١,٥$ أمتار عن سطح الأرض، جد معدل تغير طول ظل الرجل.

الحل



الشكل (٣-٦)

افرض أنّ: س بُعد الرجل عن عمود الكهرباء.

ص طول ظل الرجل.

انظر الشكل (٣-٦)

حدد الثوابت والمتغيرات والمعدلات الزمنية المعطاة والمطلوبة كما يأتي:
المعطيات:

الثوابت: طول الرجل = $١,٧ \text{ م}$ ، طول عمود الكهرباء = $٥,١ \text{ م}$

المتغيرات: بُعد الرجل عن عمود الكهرباء س، طول ظل الرجل ص.

المعدلات المعطاة: $\frac{دس}{دق} = ٢ \text{ م/ث}$

المعدلات المطلوبة: $\frac{دص}{دق}$

ابحث عن علاقة تربط بين المتغيرات س، ص، فتجد من خلال تشابه المثلثين أ ب ج، د هـ ج أن:

$$\frac{أ ب}{د هـ} = \frac{س + ص}{ص} \quad \text{ومنه} \quad \frac{س + ص}{ص} = \frac{٥,١}{١,٧} \quad \text{ومنه} \quad ٣ ص = س + ص$$

٢ ص = س (١)

وللحصول على علاقة تربط بين المعدلات: $\frac{ص}{س}$ ، $\frac{د}{ن}$ ، اشتق طرفي المعادلة (١) ضمناً بالنسبة إلى الزمن فتحصل على:

$$\frac{ص}{س} = \frac{د}{ن} ، ومنه \frac{ص}{س} = \frac{د}{ن} \times \frac{١}{٢} (٢)$$

وبالتعويض عن $\frac{د}{ن}$ في المعادلة (٢)، تجد أن:

$$\frac{ص}{س} = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١ م/ث.$$

أي أن طول ظل الرجل يزداد بمعدل ١ م/ث.

تدريب ٢

في مثال (٣) جد معدل تغير بُعد رأس الرجل عن المصباح؛ عندما يكون الرجل على بعد ٣ أمتار عن عمود الكهرباء.

مثال ٤

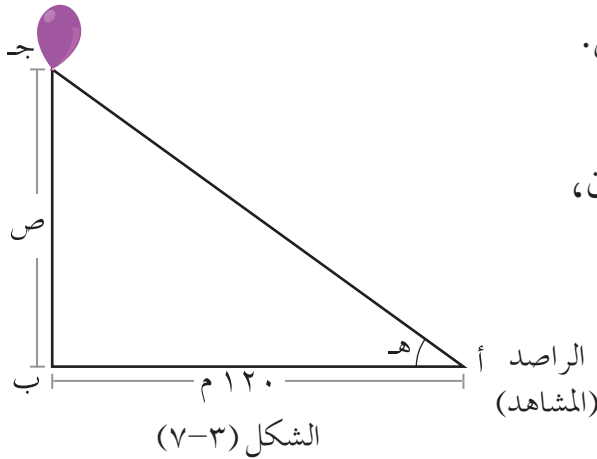
يرتفع بالون رأسياً إلى أعلى بمعدل ثابت قدره ٤٠ م/د، رصده مشاهد يقف على الأرض، ويبعد ١٢٠ م عن موقع البالون على الأرض، جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون؛ عندما يكون البالون على ارتفاع ١٢٠ م عن سطح الأرض.

الحل

افرض أن هـ زاوية ارتفاع نظر المشاهد في اللحظة ن،

وأن ص ارتفاع البالون عن سطح الأرض،

انظر الشكل (٣-٧).



المعطيات: $\frac{ص}{س} = ٤٠ م/د$

المطلوب: $\frac{هـ}{ن}$ عندما ص = ١٢٠ م

العلاقة التي تربط بين المتغيرين ص، هـ هي ظاهر = $\frac{ص}{١٢٠} (١)$

وباشتقاق العلاقة (١) ضمنيًا بالنسبة إلى الزمن نجد أن:

$$\text{قا}^2 \text{هـ} \times \frac{\text{د} \text{هـ}}{\text{د} \text{ن}} = \frac{1}{120} \times \frac{\text{د} \text{ص}}{\text{د} \text{ن}} \dots\dots\dots (٢)$$

عندما ص = ١٢٠ م يصبح المثلث القائم متطابق الضلعين، فعندئذ تصبح هـ = $\frac{\pi}{4}$ ، وبالتالي

قا^٢هـ = ٢، وبالتعويض في المعادلة (٢) نجد أن:

$$٢ \times \frac{\text{د} \text{هـ}}{\text{د} \text{ن}} = \frac{1}{120} \times ٤٠ \text{ ومنه } \frac{1}{٦} = \frac{\text{د} \text{هـ}}{\text{د} \text{ن}} \text{ راديان / ث.}$$

تدريب ٣

مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين ٨ سم، يزداد قياس الزاوية المحصورة

بينهما بمعدل ٢°/د، جد معدل التغير في مساحة المثلث في كل من الحالات الآتية:

(١) عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٠°.

(٢) عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٠°.

قارن بين الإجابتين وفسر ذلك.

مثال ٥

دائرتان متحدتان في المركز، طولاً نصفى قطريهما ٥ سم، ٢٠ سم، ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع

بحيث يزداد طول نصف قطرها بمعدل ٢ سم/د، وفي اللحظة نفسها أخذت الدائرة الكبرى تصغر

بحيث يتناقص طول نصف قطرها بمعدل ١ سم/د، جد معدل التغير في المساحة المحصورة بين

الدائرتين في اللحظة التي تنطبق الدائرتان على بعضهما.

الحل

افرض أن الزمن لتغيرهما هو ن دقيقة

طول نصف قطر الدائرة الصغرى = ٢ + ٥ ن

طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ٢٠ - ن

م(ن) المساحة المحصورة بينهما

$$\text{م(ن)} = \pi (٢٠ - ن)^2 - \pi (٢ + ٥ ن)^2$$

المطلوب: $\frac{\text{د} \text{م}}{\text{د} \text{ن}}$ عندما م = ٠ أي عندما ٢٠ - ن = ٢ + ٥ ن

لماذا؟

لماذا؟

ومنه $١٥ = ٣ن$

∴ $٥ = ٣ن$ دقائق.

$$\frac{٣م}{٥ن} = -٢(٣٠ - ن) - ٤(٥ + ٢ن)$$

$$\text{عندما } ٥ = ن، \text{ فإن } \frac{٣م}{٥ن} = -٢(٣٠ - ٥) - ٤(٥ + ٢ \times ٥) = -٩٠ \text{ سم} \times \frac{٣}{٥}$$



فكر وناقش

ما دلالة الإشارة السالبة التي حصلت عليها في حل مثال (٥)؟

وبصورة عامة، حل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن يمكنك اتباع الخطوات الآتية:

- (١) ارسم شكلاً تقريبياً للمسألة موضّحاً عليه البيانات المعطاة، إن أمكنك ذلك.
- (٢) حدد الثوابت والمتغيرات، والمعدلات الزمنية المعطاة والمطلوبة.
- (٣) ابحث عن علاقة رياضية مستعينة بالرسم تربط متغيرات المسألة؛ بحيث تكون معدلات جميع متغيرات المسألة معلومة باستثناء المعدل المطلوب إيجاداه.
- (٤) عوّض عن الثوابت في العلاقة التي حصلت عليها قبل إجراء عملية الاشتقاق لطرفيها في حالات معينة تتطلب ذلك.
- (٥) اشتقّ طرفي العلاقة التي حصلت عليها بالنسبة إلى الزمن؛ للحصول على علاقة أخرى تربط بين المعدلات.
- (٦) عوّض بالقيم المعلومة لإيجاد المطلوب.

(١) مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل 0.0001 سم/ث، جد معدل التغير في كلٍّ من حجمه ومساحته الكلية؛ عندما يكون طول ضلعه 10 سم.

(٢) يرتكز سلم طوله 5 أمتار بطرفه العلوي على حائط عمودي، وبطرفه السفلي على أرض مستوية إذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $\frac{1}{3}$ م/ث، فجد سرعة انخفاض الطرف العلوي للسلم؛ عندما يكون طرفه السفلي على بعد 3 م عن الحائط.

(٣) قمع على شكل مخروط دائري قائم قاعدته للأعلى، فإذا كان ارتفاع القمع 16 سم، وطول نصف قطر قاعدته 8 سم، صُبَّ فيه سائل بمعدل 12 سم^٣/ث، جد معدل تغير مساحة سطح السائل في القمع عندما يكون ارتفاع السائل 8 سم.

(٤) انطلقت سفيتان من الميناء نفسه في اتجاهين مختلفين على شكل خطين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما (120°) ، إذا كانت سرعة الأولى 30 كم/ساعة، وسرعة الثانية 40 كم/ساعة، فجد معدل تغير البعد بينهما عندما يكون بعدهما عن نقطة الانطلاق 6 كم، 8 كم على الترتيب.

(٥) بدأت النقطتان أ، ب الحركة معاً من نقطة الأصل (م)؛ بحيث تتحرك النقطة ب على المحور السيني الموجب مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة 2 سم/ث، وتتحرك النقطة أ في الربع الأول على منحنى الاقتران $Q(s) = s^3$ ، بحيث تبقى $\overline{AB}$ دائماً عمودية على محور السينات الموجب، جد:
 أ) معدل التغير في مساحة المثلث ABM بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.
 ب) معدل التغير في طول وتر المثلث ABM بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.

(٦) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

(٧) بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الأصل من النقطة $(0, 5)$ باتجاه عكس عقارب الساعة، بحيث يزداد طول القوس الدائري الذي ترسمه النقطة في أثناء حركتها بمعدل 10 سم/ث، جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة $(0, 5)$ ؛ عندما يقابل القوس الذي ترسمه النقطة زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ راد.

٨) تتمدد أضلاع مربع بمعدل 4 سم/ث ، رُسِمت دائرة حول المربع بحيث تلامس رؤوسه ، وأُخذت تتمدد مع المربع بحيث تبقى محافظة على شكلها ووضعها، جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمربع، عندما يكون طول ضلع المربع 10 سم .

٩) مصعدان كهربائيان مستقران في الطابق الأرضي، المسافة الأفقية بينهما 8 أمتار ، بدأ المصعد الأول يرتفع إلى الأعلى بسرعة 2 م/ث ، وبعد ثانيتين بدأ المصعد الثاني في الارتفاع بسرعة 1 م/ث . جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ثانيتين من بدء حركة المصعد الثاني.



تطبيقات عملية على التفاضل

Applications of Derivative

الفصل الثاني

النتائج

- تحدد النقط الحرجة لاقتران معطى.
- تحدد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى.
- تستخدم اختبار المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى، إن وجدت، لاقتران معطى.
- تتعرف مفهوم التقعر ونقط الانعطاف، وتحدد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لاقتران ما باستخدام المشتقة الثانية.
- تستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية.
- تحل مسائل عملية على القيم القصوى.

Critical Points

أولاً النقط الحرجة

جد النقط الحرجة للاقتران $Q(S) = |S^2 - 2S|$ ، $S \in [1, 3]$.

سيتناول هذا الدرس تطبيقاً آخر للمشتقة الأولى، وهو **النقط الحرجة**.

تعريف

إذا كانت S_1 ضمن مجال الاقتران Q ، فإن القيمة S_1 تسمى قيمة حرجة للاقتران Q إذا تحقق أن:
 $Q'(S_1) = 0$ أو $Q'(S_1)$ غير موجودة. وفي هذه الحالة تسمى النقطة $(S_1, Q(S_1))$ نقطة حرجة للاقتران Q .

مثال ١

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = ٣س^٢ - ٢س^٣$ ، $س \in [-٢، ٣]$

الحل

$ق'(س) = ٦س - ٦س^٢$ ، $ق'(س) = ٠$ عندما $٦س - ٦س^٢ = ٠$ ومنه:
 $٦س(١ - س) = ٠$ أي عند: $س = ٠$ ، $س = ١$ وكلاهما في الفترة $[-٢، ٣]$
وتكون $ق'(س)$ غير موجودة عندما $س = -٢$ ، $س = ٣$ (أطراف الفترة)
وعليه يكون للاقتران $ق$ أربع نقط حرجة هي: $(٠، ٣)$ ، $(٢، ٠)$ ، $(٠، ٠)$ ، $(٣، -٢)$

تدريب ١

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = ٣س^٢ - ٢س + ١$ ، $س \in [-٣، ٣]$

مثال ٢

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = ١ - ٣س + ٣س^٢$ ، $س \in [٠، \pi]$

الحل

$ق'(س) = ٦س - ٣$ جتا $س = ١ - ٣س + ٣س^٢$ ، $ق'(س) = ٠$ عندما:
 $٦س - ٣ = ٠$ أي عند $س = \frac{\pi}{٢}$

وتكون $ق'(س)$ غير موجودة عندما $س = ٠$ ، $س = \pi$ (أطراف الفترة)

وعليه يكون للاقتران $ق$ ثلاث نقط حرجة هي:

$(٠، ١)$ ، $(\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢})$ ، $(\pi، ٠)$.

تدريب ٢

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = ٣س - ٣س^٢$ ، $س \in [٠، \pi]$

مثال ٣

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = \sqrt[٢]{٤س - ٣}$ ، $س \in [-٣، ٣]$

الحل

$$ق(س) = \frac{س}{\sqrt[3]{(س-٤)^2}} \times \frac{٢-}{٣} =$$

ق(س) = ٠ عندما البسط = ٠ أي أن س = ٠

وتكون ق(س) غير موجودة عندما المقام = ٠ ، وعند أطراف الفترة، أي عندما

س = ٢- ، س = ٢ ، س = ٣- ، س = ٣ وعليه يكون للاقتران خمس نقط حرجة هي :

$$(٣-، \sqrt[3]{٥-}) ، (٢-، ٠) ، (٠، ٢) ، (٠، \sqrt[3]{٤}) ، (٣، \sqrt[3]{٥-})$$

تدريب ٣

جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = $\sqrt[3]{س^٢}$ ، س $\in [٢-، ٢]$

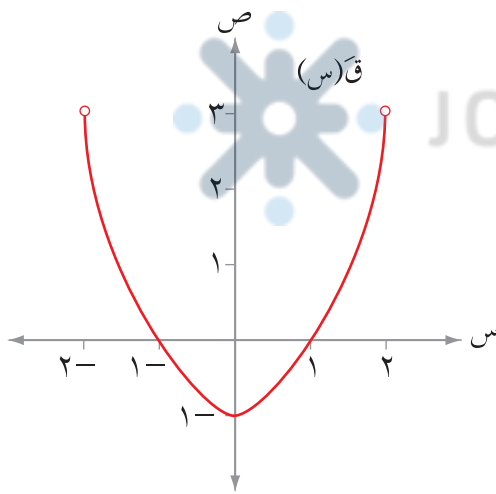
مثال ٤

يمثل الشكل (٣-٨) منحنى المشتقة الأولى للاقتران

ق(س) المعروف على الفترة $[٢-، ٢]$ اعتمد على

ذلك في تعيين النقط الحرجة للاقتران ق.

الحل



الشكل (٣-٨)

للاقتران نقط حرجة عندما ق(س) = ٠ ، أو غير

موجودة (ويكون ذلك عند المقطع السيني لمنحنى

المشتقة الأولى وأطراف الفترة)

أي عندما س = ٢- ، ١- ، ١ ، ٢

وعليه يكون للاقتران أربع نقط حرجة هي :

$$(١-، ق(١-)) ، (١، ق(١)) ، (٢-، ق(٢-)) ، (٢، ق(٢))$$

تدريب ٤

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

(١) جد النقط الحرجة لكلٍّ من الاقتارات الآتية:

أ) $ق(س) = س^٤ - ٤س + ١$ ، $س \in [-٢, ٢]$

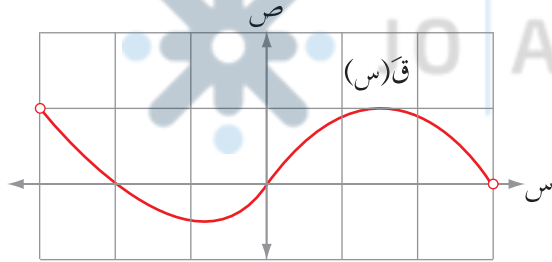
ب) $ق(س) = جا س + جتا س$ ، $س \in [٠, \pi]$

ج) $ق(س) = س^٢ |س - ١|$ ، $س \in [-٣, ٢]$

د) $ق(س) = \sqrt{جتا س}$ ، $س \in [٠, \pi]$

هـ) $ق(س) = \begin{cases} ١ + س^٢ \\ س^٢ \end{cases}$ ، $١ \geq س \geq ٢ -$ ، $٢ \geq س > ١$ ،

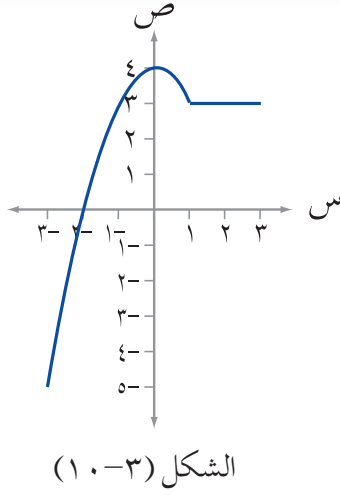
(٢) جد قيم أ، ب التي تجعل للاقتران $ق(س) = س^٣ + أس^٢ + ب س$ نقطتين حرجتين عند $س = ١$ ، $س = ٣$.



الشكل (٣-٩)

(٣) يمثل الشكل (٣-٩) منحنى المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق المعرّف على الفترة $[-٣, ٣]$ اعتمد على ذلك في تعيين النقط الحرجة للاقتران ق.

(٤) جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = \frac{١ - س^٣}{١ + س^٣}$



اعتمادًا على الشكل (١٠-٣) الذي يمثل منحنى الاقتران

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 & , -3 \leq x \leq 1 \\ 3 & , 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

صف سلوك منحنى الاقتران ق كلما زادت

قيم س في الفترة $[-3, 3]$

لاحظ من خلال الشكل (١٠-٣) ما يأتي:

(١) في الفترة $[-3, 0]$ كلما زادت قيم س زادت قيم $f(x)$ ، وفي هذه الحالة يكون ق **متزايدًا** على الفترة $[-3, 0]$ مثلاً $2 > 1$ وأيضًا $f(2) > f(1)$.

(٢) وفي الفترة $[0, 1]$ كلما زادت قيم س نقصت قيم $f(x)$ ، وفي هذه الحالة يكون ق **متناقصًا** على الفترة $[0, 1]$ مثلاً $1 > 0$ ، وأيضًا $f(1) < f(0)$.

(٣) في الفترة $[1, 3]$ كلما زادت قيم س بقيت قيم $f(x)$ ثابتة، وفي هذه الحالة يكون ق **ثابتًا** على الفترة $[1, 3]$ مثلاً $3 < 2$ ، ولكن $f(3) = f(2)$.

تعريف

إذا كان ق $f(x)$ اقترانًا معرفًا على الفترة $[a, b]$ وكان $s_1, s_2 \in [a, b]$ ، عندئذ يكون الاقتران ق:

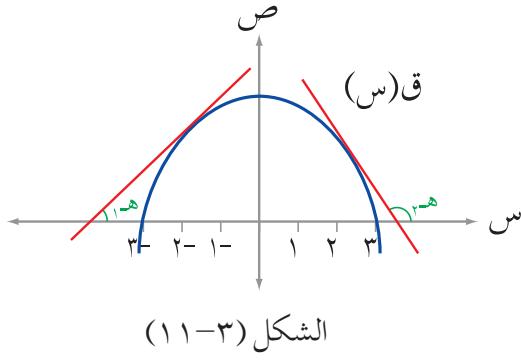
(١) متزايدًا على الفترة $[a, b]$ إذا كان ق $f(x)$ $>$ ق $f(s_1)$ لكل $s_2 > s_1$

(٢) متناقصًا على الفترة $[a, b]$ إذا كان ق $f(x)$ $<$ ق $f(s_1)$ لكل $s_2 > s_1$

(٣) ثابتًا على الفترة $[a, b]$ إذا كان ق $f(x)$ $=$ ق $f(s_1)$ لكل $s_2 > s_1$

ومن التعريف لاحظ أن الاقتران ق يكون متزايدًا عندما يصعد منحناه إلى الأعلى كلما تحركت

س إلى اليمين، ويكون متناقصًا عندما يهبط منحناه إلى أسفل كلما تحركت س إلى اليمين.



في الشكل (٣-١١) إذا رسمت مماسًا لمنحنى ق في الفترة $(-٣, ٠)$ تجد أن المماس يصنع زاوية حادة (هـ) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ومنه ظاهر $٠ < ٠$ ، ماذا تتوقع أن تكون إشارة ق(س)؟ وإذا رسمت مماسًا لمنحنى ق في الفترة $(٣, ٠)$ نجد أن المماس يصنع زاوية منفرجة (هـ) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ومنه ظاهر $٠ > ٠$ ، ماذا تتوقع أن تكون إشارة ق(س)؟

نظرية

إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على الفترة $[أ، ب]$ ، وقابلًا للاشتقاق على الفترة $(أ، ب)$ وكان:

- (١) ق(س) $٠ < ٠$ ، لجميع قيم س $\exists (أ، ب)$ ، فإن ق(س) يكون متزايدًا على الفترة $[أ، ب]$.
- (٢) ق(س) $٠ > ٠$ ، لجميع قيم س $\exists (أ، ب)$ ، فإن ق(س) يكون متناقصًا على الفترة $[أ، ب]$.
- (٣) ق(س) $٠ = ٠$ ، لجميع قيم س $\exists (أ، ب)$ ، فإن ق(س) يكون ثابتًا على الفترة $[أ، ب]$.

يمكنك من خلال هذه النظرية تحديد فترات التزايد والتناقص للاقتزان ق، وذلك بإيجاد المشتقة الأولى للاقتزان ق، ودراسة إشارتها كما في الأمثلة الآتية:

مثال ١

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتزان ق(س) $= ٣ - ٢س$ ، س $\exists [-٢، ٢]$

الحل

ق اقتران متصل على الفترة $[-٢، ٢]$ وقابل للاشتقاق على الفترة $(-٢، ٢)$ لأنه على صورة كثير حدود

$$ق(س) = ٣ - ٢س، ق'(س) = ٠، عندما ٣(١ - س)(١ + س) = ٠.$$

$$\therefore س = ١، س = -١$$

الجدول (٣-١)

ق(س)	إشارة ق'(س)	قيم س
↗	+	-٢
↘	-	-١
↗	+	١
↘	-	٢

يبين الجدول (٣-١) إشارة ق'(س)،

و بتطبيق النظرية أعلاه تجد أن:

(١) $Q(s) < 0$ على الفترة $(-2, -1)$ ، والفترة $(1, 2)$ وعليه يكون $Q(s)$ اقتراناً متزايداً على الفترتين $[-2, -1]$ ، $[1, 2]$.

(٢) $Q(s) > 0$ على الفترة $(-1, 1)$ وعليه يكون $Q(s)$ اقتراناً متناقصاً على الفترة $[-1, 1]$ والجدول (٣-١) يوضح إشارة $Q(s)$ وفترات تزايد الاقتران Q ، ويعبر عن التزايد بالرمز $(\nearrow)$ ، كما يوضح الجدول فترات تناقص الاقتران Q ، ويعبر عن التناقص بالرمز $(\searrow)$.
لاحظ أنه لتحديد إشارة المشتقة الأولى على فترة معينة بين نقطتين حرجيتين؛ تقوم باختبار إشارة المشتقة الأولى عند أي قيمة داخل الفترة وما تحصل عليه من إشارة لهذه القيمة يمثل إشارة المشتقة الأولى على كل هذه الفترة.

تدريب ١

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران $Q(s) = 3s^2 - 2s$

مثال ٢

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران $Q(s) = s^2 - 2s$ ، $s \in [0, \pi]$

الحل $Q(s) = s^2 - 2s$ وقابل للاشتقاق على الفترة $[0, \pi]$

$Q'(s) = 2s - 2 = 0$ جاس

$Q'(s) = 0$ ، عندما $s = \pi$

الجدول (٣-٢)

قيم s	إشارة $Q'(s)$	$Q(s)$
0	غير موجودة	
π	غير موجودة	
π^2	غير موجودة	

والجدول (٣-٢) يبين إشارة $Q'(s)$ ، وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى في التزايد والتناقص تكون:

$Q'(s) > 0$ ، لكل $s \in (0, \pi)$ وعليه يكون

$Q(s)$ اقتراناً متناقصاً على الفترة $[0, \pi]$

$Q'(s) < 0$ ، لكل $s \in (\pi, \pi^2)$.

وعليه يكون $Q(s)$ اقتراناً متزايداً على الفترة $[\pi^2, \pi]$.

تدريب ٢

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران $Q(s) = s^2 - 2s$ ، $s \in [0, \pi]$.

مثال ٣

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران: $Q(s) = \sqrt[3]{s^3 - 6s^2}$

الحل

ق اقتران متصل على ح.

$$Q'(s) = \frac{s^2 - 4s}{\sqrt[3]{2(s^3 - 6s^2)}}$$

$Q'(s) = 0$ عندما البسط $= 0$ ،

ومنه $s^2 - 4s = 0$ ، أي أن $s = 4$ ، $s = 0$ تهمل (لماذا؟)

$Q'(s)$ غير موجودة عند أصفار المقام أي عند $s = 0$ ، $s = 6$

والجدول (٣-٣) يبين إشارة $Q'(s)$ ، وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى في التزايد والتناقص تكون:

الجدول (٣-٣)

	ق(س)
	إشارة $Q'(s)$
	قيم(س)
↗ ↘ ↗ ↗	↗ ↘ ↗ ↗
+++ - - - +++ +++	+++ - - - +++ +++
0 4 6	0 4 6

$Q'(s) < 0$ ، لكل $s \in (-\infty, 0) \cup (0, 4)$ ، وعليه يكون $Q(s)$ اقتراناً متزايداً على الفترتين

$(-\infty, 0]$ ، $[4, \infty)$

$Q'(s) > 0$ ، لكل $s \in (4, \infty)$ ، وعليه يكون $Q(s)$ اقتراناً متناقصاً على الفترة $[4, 6]$.

تدريب ٣

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران: $Q(s) = \sqrt[3]{s^3 - 1}$ ، $s \in \mathbb{R}$.

مثال ٤

$$\left. \begin{array}{l} s \geq 0 , \quad s^2 + 6s + 4 \\ 0 < s < 1 , \quad [s + 4] \\ s \geq 1 , \quad |3s + 1| \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان } Q(s)$$

فحدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق على مجاله.

الحل

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq s, \quad s^2 + 6s + 4 \\ 0 < s < 1, \quad 4 \\ s \geq 1, \quad s^3 + 1 \end{array} \right\} = \text{أعد تعريف الاقتران ق}(s)$$

ق(س) اقتران متصل على ح

$$\left. \begin{array}{l} s > 0, \quad s^2 + 6 \\ 0 < s < 1, \quad 0 \\ s > 1, \quad 3 \\ \text{غير موجودة} \end{array} \right\} = \text{ق}(s)$$

تكون ق(س) غير موجودة عندما $s = 0$ ، $s = 1$

ق(س) = 0، عندما $s^2 + 6 = 0$ ، أي أن $s = -3$

الجدول (٣-٤)

ق(س)	
إشارة ق(س)	
قيم س	

والجدول (٣-٤) يبين إشارة ق(س)، وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى في التزايد والتناقص تكون:

ق(س) > 0 ، لكل $s \in (-\infty, -3)$ وعليه يكون ق(س) اقتراناً متناقصاً على الفترة $(-\infty, -3]$

ق(س) < 0 ، لكل $s \in (0, 3)$ ، $(1, \infty)$ وعليه يكون ق(س) اقتراناً متزايداً على الفترتين

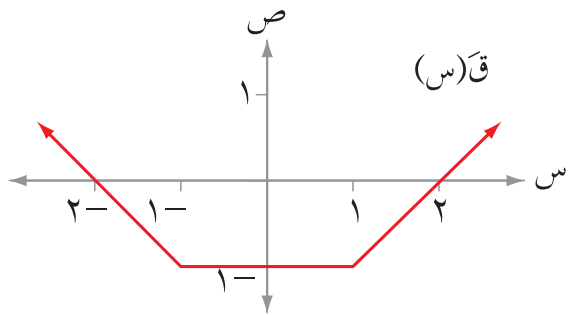
$[0, 3]$ ، $(1, \infty)$

ق(س) = 0، لكل $s \in (0, 1)$ وعليه يكون ق(س) اقتراناً ثابتاً على الفترة $[0, 1]$

(١) حدّد فترات التزايد وفترات التناقص لكلّ من الاقترانات الآتية:

- أ) $ق(س) = ٤س - س^٢$ ، $س \in ح$ ،
 ب) $ق(س) = |٩ - س^٢|$ ، $س \in]٥ - ، ٥[$ ،
 ج) $ق(س) = جتا٢س$ ، $س \in]٠ ، ٢\pi[$ ،
 د) $ق(س) = (س - ١)^٣$ ، $س \in ح$ ،
 هـ) $ق(س) = (س - ٢)^٤$ ، $س \in ح$ ،
 و) $ق(س) = \sqrt[٢]{٢٥ - س}$ ، $س \in]٥ - ، ٥[$ ،
 ز) $ق(س) = \sqrt[٣]{(س - ٤)^٢}$ ، $س \in ح$ ،
 ح) $ق(س) = جتا٢س - \frac{١}{٢} جتا٢س$ ، $س \in]٠ ، ٢\pi[$ ،

ط) $ق(س) = \begin{cases} ٣ - س^٢ ، & س \geq ١ \\ \frac{٢}{س} ، & س < ١ \end{cases}$ ،
 ي) $ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^٣ ، & س > ١ \\ \frac{٣}{س} ، & س \leq ١ \end{cases}$ ،



الشكل (١٢-٣)

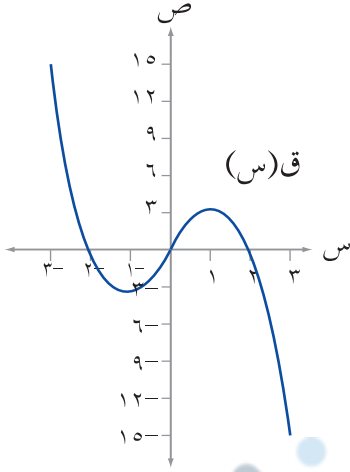
(٢) يمثل الشكل (١٢-٣) منحنى اقتران

المشتقة الأولى للاقتران ق، حدد فترات التزايد

وفترات التناقص للاقتران ق.

(٣) إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا على الفترة [أ ، ب] وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكان ق(س) < ٠ ، لكلّ س ∈ (أ ، ب) ، وكان هـ(س) = ق(س) + س³ ، فأثبت أنّ هـ(س) متزايد على الفترة [أ ، ب].

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وُجدت) للاقتزان $ق(س) = |س - ١|^٢$ ، $س \in [٣، ٤]$.



الشكل (٣-١٣)

من خلال تأمل الشكل (٣-١٣) الذي يمثل منحنى الاقتزان $ق(س) = |س - ١|^٢$ ، $س \in [٣، ٣-]$ ، يمكنك التحقق من أن:

(١) $ق(س)$ هي أكبر قيمة للاقتزان $ق(س)$ في فترة مفتوحة حول العدد $\frac{٢}{٣}$ ، ومثل هذه القيمة تسمى **قيمة عظمى محلية** للاقتزان $ق$.

(٢) $ق(س)$ هي أكبر قيمة للاقتزان $ق(س)$ في الفترة $[٣، ٣-]$ ، ومثل هذه القيمة تسمى **قيمة عظمى مطلقة** للاقتزان $ق$.

(٣) $ق(س)$ هي أصغر قيمة للاقتزان $ق(س)$ في فترة مفتوحة حول العدد $\frac{٢}{٣}$ ، ومثل هذه القيمة تسمى **قيمة صغرى محلية** للاقتزان $ق$.

(٤) $ق(س)$ هي أصغر قيمة للاقتزان $ق(س)$ في الفترة $[٣، ٣-]$ ، ومثل هذه القيمة تسمى **قيمة صغرى مطلقة** للاقتزان $ق$.

تعلم

تسمى القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية للاقتزان قيماً قصوى محلية، كذلك تسمى القيم العظمى المطلقة والصغرى المطلقة للاقتزان قيماً قصوى مطلقة.

فكر وناقش

معتمداً الشكل السابق (٣-١٤)، ما العلاقة بين النقط الحرجة للاقتزان $ق$ وقيمته القصوى؟

تعريف

- إذا كان $Q(S)$ اقتراناً معرفاً على الفترة $[A, B]$ ، وكان $S_1 \in [A, B]$ ، فإن:
- (١) $Q(S_1)$ قيمة عظمى محلية للاقتزان Q ، إذا وجدت فترة مفتوحة (F) تحوي S_1 ، وكان $Q(S_1) \leq Q(S)$ لجميع قيم $S \in F$.
 - (٢) $Q(S_1)$ قيمة صغرى محلية للاقتزان Q ، إذا وجدت فترة مفتوحة (F) تحوي S_1 ، وكان $Q(S_1) \geq Q(S)$ لجميع قيم $S \in F$.
 - (٣) $Q(S_1)$ قيمة عظمى مطلقة للاقتزان Q ، إذا كان $Q(S_1) \leq Q(S)$ لجميع قيم $S \in [A, B]$.
 - (٤) $Q(S_1)$ قيمة صغرى مطلقة للاقتزان Q ، إذا كان $Q(S_1) \geq Q(S)$ لجميع قيم $S \in [A, B]$.

نظرية

إذا كان $Q(S)$ اقتراناً معرفاً على الفترة $[A, B]$ وكانت $Q(J)$ قيمة قصوى للاقتزان Q حيث $J \in [A, B]$ ، فإن $Q(J)$ غير موجودة أو $Q(J) = 0$.

نظرية

نظرية (اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى)

إذا كان $Q(S)$ اقتراناً متصلًا على الفترة $[A, B]$ ، وقابلًا للاشتقاق على الفترة (A, B) وكانت النقطة J ، $Q(J)$ نقطة حرجة للاقتزان Q ، حيث $J \in (A, B)$ عندئذ:

- (١) إذا كان $Q(S) \leq 0$ لكل $S > J$ وكان $Q(S) \geq 0$ لكل $S < J$ ، فإن: $Q(J)$ تكون قيمة عظمى محلية للاقتزان Q .
- (٢) إذا كان $Q(S) \geq 0$ لكل $S > J$ وكان $Q(S) \leq 0$ لكل $S < J$ ، فإن: $Q(J)$ تكون قيمة صغرى محلية للاقتزان Q .

والأمثلة الآتية توضح ذلك.

مثال ١

جد قيم s الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران $Q(s) = s^3 - s^2 + s - 1$ ، $s \in [-2, 4]$.

الحل

لاحظ أن الاقتران Q كثير حدود؛ فهو متصل على الفترة $[-2, 4]$ ، وقابل للاشتقاق على

الفترة $(-2, 4)$ حيث

$$Q'(s) = 3s^2 - 2s + 1 = 0$$

$$Q'(s) = 0 \text{ إذن } 3s^2 - 2s + 1 = 0$$

$$3s^2 - 2s + 1 = 0 \text{ أي عندما } s = 0, s = 2$$

وتكون $Q'(s)$ غير موجودة. عندما يكون $s = -2, s = 4$ (طرفي فترة).

ومن الجدول $(3-5)$ ، وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى عند قيم s التي يوجد

الجدول $(3-5)$

ق(س)	٤	٢	٠	-٢
إشارة ق'(س)	+	-	+	+
قيم(س)	٤	٢	٠	-٢

تجد أن للاقتران Q :

قيمة عظمى محلية عند $s = 0$ وهي $Q(0) = 1$

قيمة صغرى محلية عند $s = 2$ وهي $Q(2) = -3$

قيمة عظمى مطلقة عند $s = 4$ وهي $Q(4) = 17$ (طرف فترة ولا تعتبر قيمة عظمى محلية)

قيمة صغرى مطلقة عند $s = -2$ وهي $Q(-2) = -9$ (طرف فترة ولا تعتبر قيمة صغرى محلية)

تدريب ١

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران $Q(s) = s^3 - s^2 + s - 2$ ، $s \in [-1, 5]$.

مثال ٢

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران $Q(s) = s^4 - s^3 + s^2 + 1$

الحل

ق(س) كثير حدود متصل وقابل للاشتقاق على ح.
يكون للاقتران نقط حرجة عند ق(س) = ٠ ، ق(س) = ٢ - ٤ = ٠
ومنه س = ٢

إذن النقطة الحرجة هي (٢ ، ٥)

الجدول (٦-٣)

↗ ↘	ق(س)
+++ ---	إشارة ق(س)
← ————— →	قيم س

ومن الجدول (٦-٣)، الذي يوضح إشارة ق(س) وحسب اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى تجد أن للاقتران ق: قيمة عظمى محلية، ومطلقة عند س = ٢ وهي ق(٢) = ٥ .

تدريب ٢

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال ٣

جد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وُجدت) للاقتران ق(س) = جتا س - $\frac{1}{3}$ جتا^٣ س، س ∈ [٠ ، π٢]

الحل

ق(س) متصل على الفترة [٠ ، π٢]، وقابل للاشتقاق لكل س ∈ (٠ ، π٢)

حيث ق(س) = -جتا س + جتا^٣ س

(لماذا؟)

ق(س) = -جتا س

جد النقط الحرجة للاقتران وادرس إشارة المشتقة الأولى حولها تجد أن:

ق(س) = ٠ عندما - جتا س = ٠، ومنه س = π

ق(س) غير موجودة عند س = ٠ ، π٢

إذن النقط الحرجة للاقتران ق هي: (٠ ، $\frac{2}{3}$) ، (π ، $\frac{2}{3}$) ، ($\frac{2}{3}$ ، π٢)

ومن الجدول (٣-٧) الذي يوضح إشارة ق(س)

وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى نجد أن للاقتران ق:

الجدول (٣-٧)

	ق(س) إشارة ق(س) قیم س
--	--

قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $\pi =$

$$\frac{2}{3} - = (\pi) \text{ هي ق}$$

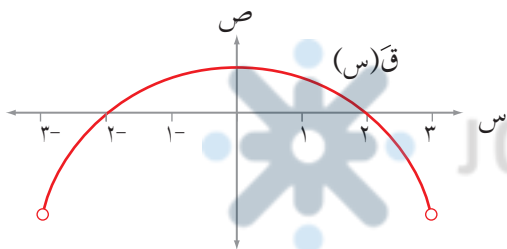
وقيمة عظمى مطلقة عند $s = 0, \pi$ هي $\frac{2}{3}$.

تدریب ۳

جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتراح $Q(s) = s + 2$ جاس، $s \in [\pi, 0]$.

مثال ۴

معتمدًا الشكل (٣-١٤) الذي يمثل منحني المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق المعروف على الفترة $[3, 3-]$ ، جد كلاً مما يأتي:



(١) مجموعة قيم s الحرجة للاقتران q .

(٢) مجالات التزايد و التناقص ، للاقتراح ق.

(٣) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية .

الحمل

(١) للاقتراح Q نقط حرجة عندما $Q(s) = 0$ أو غير موجودة

أي عندما $s = 3^-$ ، $s = 2^-$ ، $s = 2$ ، $s = 3$ (لماذا؟)

وعليه فإنَّ مجموعة قيم s الحرجة للاقتراح هي $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

(٢) من جدول الإشارات (٣-٨)، الذي يوضح إشارة ق(س) نجد أن:

الجدول (٣-٨)

ق اقتران متناقض في الفترتين $[2-, 3-]$ ، $[3, 2]$

ق اقتران متزايد في الفترة $[-2, 2]$

	ق(س)
غير موجودة	إشارة ق(س)
غير موجودة	قيم س

(۳) یو جد للاقتران ق قيمة صغری محلیة عند س، = -۲

يوجد للاقتراح قيمة عظمى محلية عند $s = 2$

(١) جد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وُجدت)، لكلٍّ من الاقتارات الآتية:

أ) $ق(س) = س^2 - ٦س + ٩$ ، $س \in [٥ ، ٠]$

ب) $ق(س) = س^3 - ١٢س$ ، $س \in [٤ ، ٤-]$

ج) $ق(س) = (س - ٢)^3$ ، $س \in [٤ ، ٠]$

د) $ق(س) = \begin{cases} ١ + س^٢ \\ ١ + س^٣ \end{cases}$ ، $٣ > س \geq ٢-$ ، $٥ \geq س \geq ٣$ ،

هـ) $ق(س) = |(١ - س)|^٣$ ، $س \in [٣ ، ١-]$

و) $ق(س) = \frac{١}{٤}س^٤ - \frac{١}{٣}س^٣$ ، $س \in [٣ ، ٠]$

ز) $ق(س) = \sqrt[٣]{٢س}$ ، $س \in [١ ، ٨-]$

ح) $ق(س) = س + جاس$ ، $س \in [\pi ٢ ، ٠]$

ط) $ق(س) = (س - ١)^٣$ ، $س \in [٢ ، ٢-]$

ي) $ق(س) = (س - ١)^٤$ ، $س \in [٣ ، ٣-]$

(٢) إذا كان لاقتران كثير الحدود $ق(س)$ قيمة عظمى محلية عند النقطة $(٢ ، ٣)$ ، بيّن أنّ للاقتران

هـ $ق(س) = (١ - ق(س))^٣$ قيمة صغرى محلية عند النقطة $(٢ ، ٨-)$.

٣) معتمداً الشكل (٣-١٥) الذي يمثل منحنى المشتقة

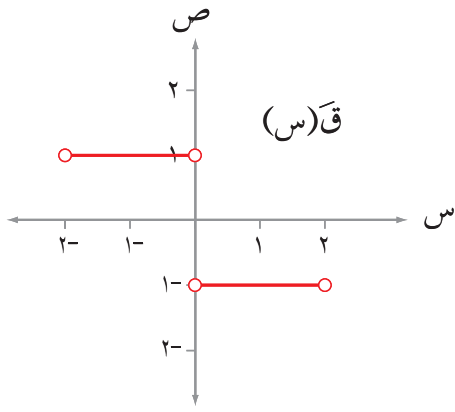
الأولى للاقتزان ق المتصل على الفترة $[-2, 2]$

جد كلاً مما يأتي:

أ) مجموعة قيم س الحرجة للاقتزان ق.

ب) مجالات التزايد والتناقص للاقتزان ق.

ج) قيم س التي يكون للاقتزان عندها قيم قصوى محلية.



الشكل (٣-١٥)

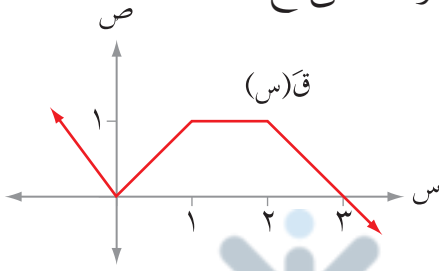
٤) يمثل الشكل (٣-١٦) منحنى المشتقة الأولى للاقتزان ق المعروف على ح.

اعتمد على ذلك في إيجاد كل مما يأتي:

أ) النقط الحرجة للاقتزان ق.

ب) مجالات التزايد والتناقص للاقتزان ق.

ج) قيم س التي يكون للاقتزان عندها قيم قصوى محلية.

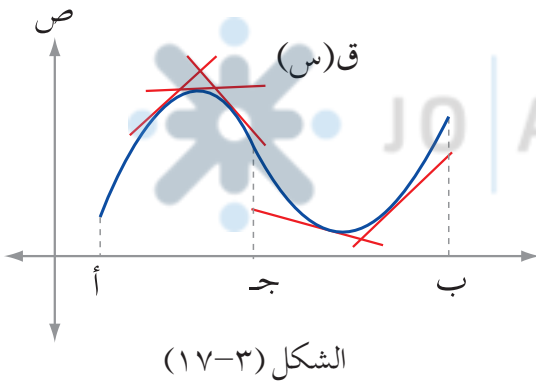


الشكل (٣-١٦)

إذا كان $Q(s) = 2 + \frac{1}{s}$ جاً s ، $s \in [0, 2\pi]$ ، فجد نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران Q .

تعلمت سابقاً بعض تطبيقات المشتقة الأولى، مثل: إيجاد فترات التزايد والتناقص لمنحنيات الاقترانات.

وفي هذا الدرس ستتعرف بعض تطبيقات المشتقة الثانية للاقتران مثل: معرفة نوع تقعر منحنى الاقتران، وتعيين نقط الانعطاف لمنحناه، بالإضافة إلى تمييز القيم القصوى للاقتران، وسيتم توضيح ذلك في ما يأتي:



يبين الشكل (١٧-٣) منحنى الاقتران Q ، المعرّف على الفترة $[أ، ب]$ ، القابل للاشتقاق على الفترة $(أ، ب)$ ، ويعني ذلك أنّ لمنحنى Q عدداً كبيراً من المماسّات على الفترة $(أ، ب)$ عند النقط $(س، Q(s))$ ، حيث $s \in (أ، ب)$.

لاحظ أنّ جميع المماسّات المرسومة عند النقط $(س، Q(s))$ ، حيث $s \in (أ، ج)$ تقع جميعها فوق منحنى الاقتران Q . ويقال في هذه الحالة إنّ منحنى الاقتران $Q(s)$ **مقعر للأسفل** على الفترة $[أ، ج]$.

ولاحظ أنّ جميع المماسّات المرسومة عند النقط $(س، Q(s))$ ، حيث $s \in (ج، ب)$ تقع جميعها تحت منحنى الاقتران Q . ويقال في هذه الحالة إنّ منحنى الاقتران $Q(s)$ **مقعر للأعلى** على الفترة $[ج، ب]$.

تعريف

- ليكن Q اقتراناً معرفاً على الفترة $[a, b]$ ، وقابلًا للاشتقاق على الفترة (a, b) فيكون منحني Q :
- (١) مقعرًا للأسفل على الفترة $[a, b]$ إذا وقعت جميع مماساته فوق منحني الاقتران Q في الفترة $[a, b]$.
 - (٢) مقعرًا للأعلى على الفترة $[a, b]$ إذا وقعت جميع مماساته تحت منحني الاقتران Q في الفترة $[a, b]$.

وبالرجوع إلى شكل (٣-١٧) لاحظ أن منحني الاقتران Q مقعر للأسفل على الفترة $[a, b]$ ، وتجد أنه كلما زاد الإحداثي السيني لنقطة التماس $(s, Q(s))$ نقص ميل المماس لمنحني Q عند هذه النقطة، أي أن $Q'(s)$ اقتران متناقص على الفترة (a, b) ، ومنه تكون إشارة $Q'(s)$ سالبة على (a, b) ، أي أن $Q'(s) < 0$ ، لكل $s \in (a, b)$.

وبالمثل لاحظ أن منحني الاقتران Q مقعر للأعلى على الفترة $[a, b]$ ، وأنه كلما زاد الإحداثي السيني لنقطة التماس $(s, Q(s))$ زاد ميل المماس لمنحني Q عند هذه النقطة، أي أن $Q'(s)$ اقتران متزايد على الفترة (a, b) ، ومنه تكون مشتقة $Q'(s)$ موجبة على الفترة (a, b) ، أي أن $Q'(s) > 0$ ، لكل $s \in (a, b)$.

تذكر

ميل المماس لمنحني الاقتران Q عند $s = s_0$ يساوي $Q'(s_0)$.

$Q'(s_0) = 0$ ظاهر، حيث $Q'(s_0)$ زاوية ميل المماس عند s_0 مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

نظرية

(اختبار التقعر)

إذا كان Q اقتراناً متصلًا على الفترة $[a, b]$ ، وكان كل من $Q'(s)$ ، $Q''(s)$ ، معرفين على الفترة (a, b) فإنه:

- (١) يكون منحني الاقتران Q مقعرًا للأسفل على الفترة $[a, b]$ ، إذا كان $Q'(s) > 0$ ، لكل $s \in (a, b)$
- (٢) يكون منحني الاقتران Q مقعرًا للأعلى على الفترة $[a, b]$ ، إذا كان $Q'(s) < 0$ ، لكل $s \in (a, b)$

مثال ١

إذا كان $ق(س) = س^3 - س^2 + س + ١$ ، جد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران $ق$.

الحل

يمكنك تحديد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران $ق$ ، من خلال إشارة مشتقته الثانية.

$$ق'(س) = س^3 - س^2 + س + ١$$

$$ق''(س) = ٣س^2 - ٢س - ١$$

وتكون $ق''(س) = ٠$ ، عندما $٣س^2 - ٢س - ١ = ٠$ ، أي أن $س = ١$

ومن الجدول (٣-٩) ، الذي يوضح إشارة $ق''$ وحسب اختبار التقعر تجد أن:

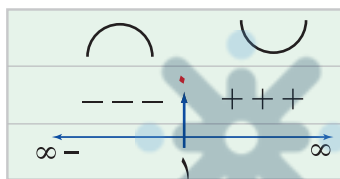
منحنى الاقتران مقعر للأسفل على الفترة $(-∞ ، ١)$ لأن $ق''(س) < ٠$ ،

لكل $س ∈ (-∞ ، ١)$.

ومقعر للأعلى على الفترة $[١ ، ∞)$ لأن $ق''(س) > ٠$ ،

لكل $س ∈ [١ ، ∞)$.

الجدول (٣-٩)

	ق(س)
	إشارة ق''(س)
	قيم س

تدريب ١

جد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران $ق$ ،

حيث $ق(س) = س^4 - س^3 + ٢س^٢ - ٥س + ٥$.

مثال ٢

حدد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٤ - ٤س^٣ + ٦س^٢ - ٤س + ١$ ، $س ∈ [-٢ ، ٢]$.

الحل

$$ق'(س) = ٤س^٣ - ١٢س^٢ + ١٢س - ٤$$

$$ق''(س) = ١٢س^٢ - ٢٤س + ١٢ = ١٢(س^٢ - ٢س + ١) = ١٢(س - ١)^٢$$

الجدول (٣-١٠)

	ق(س)
	إشارة ق(س)
	قيم س

لاحظ من خلال إشارة ق(س) حول س=٠ في الجدول (٣-١٠) أنَّ منحنى ق مقعر للأعلى على الفترة $[٠, ٢]$ ، ومقعر للأسفل على الفترة $[٢, ٠]$

تدريب ٢

ليكن ق(س)=س^٢/_٣، جد مجالات التقعر لمنحنى الاقتران ق.

من خلال المثالين (١)، (٢)، السابقين لا بد أنَّك لاحظت أنَّ منحنى ق يغيّر من اتجاه تقعره حول نقطة في مجاله؛ فقد غيّر اتجاه تقعره من أسفل إلى أعلى حول النقطة (١، ٢) في المثال (١)، كما أنه غيّر اتجاه تقعره من أعلى إلى أسفل حول النقطة (٠، ٠) في المثال (٢)، وتسمى كلُّ من هذه النقط التي يغير الاقتران ق اتجاه تقعره حولها **نقطة انعطاف**.

تعريف

إذا كان ق اقتراناً متصلاً على فترة مفتوحة تحوي س_١، وكان منحنى ق يغير اتجاه تقعره عند س_١ فإنَّ النقطة (س_١، ق(س_١)) تسمى نقطة انعطاف لمنحنى ق.

مثال ٣

جد نقط الانعطاف لمنحنى ق حيث:

$$ق(س) = س^٤ - ٦س^٢ + ١، س \in ح$$

الحل

الاقتران ق كثير حدود؛ فهو متصل لكلِّ س $\in ح$ وتكون ق، ق' معرفتين لكلِّ س $\in ح$ حيث:

$$ق(س) = س^٤ - ٦س^٢ + ١$$

$$ق'(س) = ٤س^٣ - ١٢س$$

وتكون ق' = ٠ عندما ٤س^٣ - ١٢س = ٠

$$٠ = ٤س^٣ - ١٢س \Rightarrow ٠ = ٤س(س^٢ - ٣) \Rightarrow س = ٠، س = \sqrt{٣}، س = -\sqrt{٣}$$

ومن خلال دراسة إشارة Q في

الجدول (٣-١١) نلاحظ أن Q

يغير اتجاهه تقعره عند $s = -1$ ،

وعند $s = 1$ ، لذلك فإن:

$(-1, -4)$ ، $(1, -4)$ نقطتا انعطاف.

الجدول (٣-١١)

			ق(س)
+++	---	+++	إشارة ق(س)
$\infty -$	$1 -$	1	قيم(س)

تدريب ٣

إذا كان $Q(s) = s^6 - s^3 - s^4$ ، فجد نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران Q (إن وجدت).

مثال ٤

جد قيم s التي يكون لمنحنى الاقتران Q عندها نقط انعطاف، حيث:

$$Q(s) = s^2 \cos s + \frac{1}{s} \sin 2s, s \in [\pi/2, 0]$$

الحل

$Q(s)$ متصل على الفترة $[\pi/2, 0]$ ، وقابل للاشتقاق على الفترة $(\pi/2, 0)$

لايجاد نقط الانعطاف Q لتحديد فترات التقعر لأعلى ولأسفل.

الجدول (٣-١٢)

				ق(س)
---	+++	---	+++	إشارة ق(س)
0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	قيم(س)

$$Q'(s) = 2 \cos s + \sin 2s$$

$$Q'(s) = 2 \cos s - \sin 2s$$

$$0 = Q'(s)$$

$$0 = 2 \cos s - \sin 2s$$

$$0 = 2 \cos s - 2 \sin s \cos s$$

$$0 = 2 \cos s (1 - \sin s)$$

$$0 = 2 \cos s + 1 \quad \text{أو} \quad 0 = 2 \cos s$$

$$\text{ومنه، } s = 0, \pi, \pi/2 \text{ (ترفض القيم } \pi/2, 0 \text{ لماذا؟)، أو } s = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

ومن خلال دراسة إشارة $Q'(s)$ في الجدول (٣-١٢) لاحظ أن منحنى Q يغير اتجاهه تقعره عند

$$s = \frac{\pi}{3}, s = \pi, s = \frac{4\pi}{3}, \text{ لذلك فإن للاقتران } Q \text{ ثلاث نقط انعطاف عند}$$

$$s = \frac{\pi}{3}, s = \pi, s = \frac{4\pi}{3}$$

تدريب ٤

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

بالإضافة إلى التطبيقات السابقة تُستخدم إشارة المشتقة الثانية للاقتراح ق في تمييز القيم القصوى المحلية للاقتراح، والنظرية الآتية توضح ذلك.

تعريف

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية:

على فرض أن المشتقة الأولى $Q'(s)$ ، والمشتقة الثانية $Q''(s)$ ، للاقتراح $Q(s)$ معرفتان عند s_0 (أ، ب) عندئذ:

- (١) إذا كان $Q'(s_0) = 0$ ، و $Q''(s_0) < 0$ ، فإن للاقتراح ق قيمة صغرى محلية عند s_0 هي $Q(s_0)$
- (٢) إذا كان $Q'(s_0) = 0$ ، و $Q''(s_0) > 0$ ، فإن للاقتراح ق قيمة عظمى محلية عند s_0 هي $Q(s_0)$
- (٣) إذا كان $Q'(s_0) = 0$ ، و $Q''(s_0) = 0$ ، فإن الاختبار يفشل، فنبحث عن القيم القصوى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الأولى.

مثال ٥

إذا كان $Q(s) = s^3 - 3s^2 + 2$ فجد القيم القصوى المحلية للاقتراح ق باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

الحل

$$Q'(s) = 3s^2 - 6s$$

وتكون $Q'(s) = 0$ إذا كان $3s^2 - 6s = 0$ أي أن $s^2(3 - 2s) = 0$ ومنه، $s = 0$ ، $s = 2$

إذن للاقتراح ق نقطتان حرجتان هما: $(0, 2)$ ، $(2, 2)$

$Q''(s) = 6s - 6$ ، وحسب اختبار المشتقة الثانية نجد أن:

$Q''(0) = -6 < 0$ ، إذن للاقتراح ق قيمة عظمى محلية عند $s = 0$ هي $Q(0) = 2$

$Q''(2) = 6 > 0$ ، إذن للاقتراح ق قيمة صغرى محلية عند $s = 2$ هي $Q(2) = -2$

تدريب ٥

ليكن $Q(s) = s^3 - 12s + 3$ ، جد القيم القصوى المحلية للاقتراح ق باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

تمارين ومسائل

(١) حدد فترات التقعر إلى الأعلى والتقعر إلى الأسفل لكلٍّ من منحنيات الاقتارات الآتية:

$$أ) \quad ق(س) = س + \frac{٤}{س}$$

$$، \quad س \in [-٤، ٤]$$

$$، \quad س > ٢$$

$$، \quad س \leq ٢$$

$$ب) \quad ق(س) = \sqrt[٢]{١٦س - س^٢}$$

$$ج) \quad ق(س) = \left. \begin{array}{l} ١ - س^٢ \\ س - ٥ \end{array} \right\}$$

$$د) \quad هـ(س) = \left(\frac{١ - س}{س} \right)^٢$$

$$هـ) \quad ق(س) = س - جتاس - ١ + س، \quad س \in [٠، \pi]$$

(٢) حدد نقط الانعطاف (إن وجدت) لكلٍّ من منحنيات الاقتارات الآتية:

$$أ) \quad ق(س) = س^٣ - ٦س^٢ + ٩س + ٢، \quad س \in ح$$

$$ب) \quad ق(س) = س^٣ - \frac{٢}{٣}س - \frac{١}{٣}، \quad س \in ح$$

$$ج) \quad ق(س) = س^{\frac{٣}{٥}}، \quad س \in ح$$

$$د) \quad ق(س) = س - ظاس، \quad س \in \left(-\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢} \right)$$

(٣) جد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية لكلٍّ من الاقتارات الآتية، باستخدام اختبار المشتقة الثانية، إن أمكن ذلك:

$$أ) \quad ق(س) = جاس - جتاس، \quad س \in [٠، ٢\pi]$$

$$ب) \quad ق(س) = س^٤، \quad س \in ح$$

$$ج) \quad ق(س) = ٤ - |س - ٢| - |س + ١| + س، \quad س \in ح$$

$$د) \quad ق(س) = س^٢ + \frac{١٢٨}{س}، \quad س \neq ٠$$

(٤) عيّن قاعدة الاقتران $ق(س) = أس^٣ + ب س^٢ + ج س + د$ ، ($أ \neq ٠$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ أعداد حقيقية) الذي يمر منحناه بالنقطة $(١، ٥)$ ، ومعادلة المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف $(٢، ١)$ ، هي:

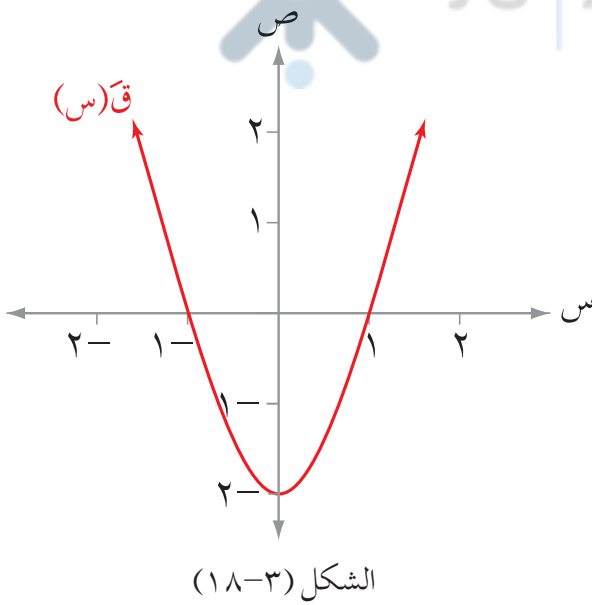
$$ص + ٣س - ٧ = ٠$$

(٥) إذا كان $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، $هـ(س) = س^{\frac{١}{٣}}$ فأجب عما يأتي:

- قارن مجالات التعرّف لكلٍّ من الاقترانين $ق$ ، $هـ$.
- جد قيم $س$ التي يكون عندها كلٌّ من الاقترانين $ق$ ، $هـ$ غير متصل.
- جد نقط الانعطاف لكلٍّ من الاقترانين $ق$ ، $هـ$ إن وُجدت.

(٦) يمثل الشكل $(١٨-٣)$ منحنى $ق(س)$ ، للاقتران $ق(س)$ المعروف على $ح$. اعتمد على ذلك في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

- عيّن مجالات التزايد والتناقص للاقتران $ق$.
- عيّن قيم $س$ التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية.
- عيّن مجالات التعرّف للاقتران $ق$.
- عيّن نقط الانعطاف للاقتران $ق$.



صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ١٢٨ سم^٢، يراد طباعة إعلان عليها، إذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١ سم، وفي كل من الجانبين $\frac{١}{٢}$ سم، فجد بُعدَي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.

تواجهك كثير من القضايا (المسائل) الحياتية في العلوم والهندسة والاقتصاد وغيرها، تحتاج إلى معرفة أكبر قيمة أو أصغر قيمة لكمية متغيرة، ولحل هذه المسائل تلجأ إلى تحويلها من صور لفظية إلى معادلات واقتارات؛ من أجل إيجاد القيم القصوى لها. وفي ما يأتي نقدم بعض المسائل في تلك المواضيع بوصفها أمثلة محلولة توضح كيفية التعامل معها رياضياً، ومن ثم تجد لها القيم القصوى المطلوبة.

مثال ١

قطعة أرض مستطيلة الشكل، محيطها ٨٠٠ متر. جد بُعدَي قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن.

الحل



ص

نفرض أن $س$ ، $ص$ بُعدا قطعة الأرض، ومساحتها $م$ ، كما في الشكل (٣-١٩).

الشكل (٣-١٩)

المعطيات: محيط قطعة الأرض $= ٨٠٠$ متر.

المطلوب: إيجاد قيمتي $س$ ، $ص$ لتكون $م$ أكبر ما يمكن.

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات؛ بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى، اقتراناً لمتغير مستقل واحد.

$$م = س \times ص \dots\dots (١)$$

ولجعل العلاقة بدلالة متغير واحد $س$ أو $ص$ ، وظف معطيات المسألة، وهي أن محيط قطعة الأرض $= ٨٠٠ م$ أي أن:

$$٢س + ٢ص = ٨٠٠، ومنها ص = ٤٠٠ - س \dots\dots (٢)$$

وبالتعويض في (١) تجد أن:

م(س) = س (٤٠٠ - س) حيث $٠ < س < ٤٠٠$ لماذا؟
وبذلك تصبح (م) بالصورة الآتية:

م(س) = س (٤٠٠ - س) - س^٢ (٣) وهو اقتران بمتغير واحد (س)، وقابل للاشتقاق.
ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران م(س) نشتق المعادلة (٣) ونتحقق من ذلك كما يأتي:

$$م'(س) = ٤٠٠ - ٢س.$$

$$م'(س) = ٠ \text{ أي أن } ٤٠٠ - ٢س = ٠, \text{ ومنه } س = ٢٠٠$$

ولاختبار أن للاقتران قيمة عظمى عند س = ٢٠٠ تجد م'(س) عند س = ٢٠٠

$$م''(س) = -٢, \text{ ومنه } م''(٢٠٠) = -٢$$

إذن للاقتران قيمة عظمى محلية عند (س = ٢٠٠) لماذا؟

أي تكون مساحة قطعة الأرض أكبر ما يمكن عندما س = ٢٠٠ متر

وبالتعويض عن قيمة س في المعادلة (٢) تجد أن

$$ص = ٤٠٠ - ٢٠٠ = ٢٠٠ \text{ متر.}$$

تدريب ١

مجموع عدد مع مثلي عدد آخر يساوي ٤٠، جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن مستخدماً تطبيقات التفاضل.

حل المسائل العملية على القيم القصوى؛ يمكنك اتباع الخطوات الآتية:

(١) اقرأ المسألة وحدد المتغيرات، وارسم شكلاً توضيحياً للمسألة.

(٢) حدد المتغير المطلوب إيجاد قيمته القصوى، واكتب المعادلة (العلاقة) التي تربط هذا المتغير بالمتغيرات الأخرى.

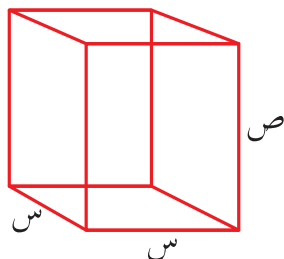
(٣) اكتب المتغير المطلوب إيجاد قيمته القصوى كاقتران في متغير واحد.

(٤) حدد مجال الاقتران الناتج إن أمكن.

(٥) استخدم ما تعلمته في الدروس السابقة في إيجاد القيم القصوى (اختبار المشتقة الثانية، اختبار المشتقة الأولى).

متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل، ومجموع أطوال أحرفه يساوي ٦٠٠ سم، جد أبعاد متوازي المستطيلات التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن.

الحل



الشكل (٣-٢٠)

افرض أن s طول قاعدته، و h ارتفاعه، وأن h حجمه. كما في الشكل (٣-٢٠).

المعطيات:

مجموع أطوال أحرف متوازي المستطيلات (٦٠٠ سم)

المطلوب:

إيجاد أبعاد متوازي المستطيلات s ، h ليكون حجمه (h) أكبر ما يمكن.

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات؛ بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقتراناً لمتغير واحد كالاتي:

$$h = s^2 \text{ (١)}$$

ولإيجاد أحد المتغيرين s أو h بدلالة الآخر، استخدم معطيات المسألة وهي أن مجموع أطوال أحرفه يساوي (٦٠٠ سم)، أي أن:

$$4s + 8s = 600 \text{ ومنها } s = 150 - 2s \text{ (٢)}$$

وبالتعويض في (١) تجد أن:

$$h(s) = s^2 (150 - 2s) \text{ حيث } 0 < s < 75 \text{ (لماذا؟)}$$

$$= 150s^2 - 2s^3 \text{ (٣) وهو اقتران بمتغير واحد}$$

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران $h(s)$ اشتق المعادلة (٣)، وتحقق من ذلك كما يأتي:

$$h'(s) = 300s - 6s^2$$

وتكون $h'(s) = 0$ عندما $300s - 6s^2 = 0$ ، أي عندما $s = 50$ ، $s = 0$ (تُهمل)

ولاختبار أن للاقتران قيمة عظمى عند $(s = 50)$ جد $h''(s)$ عند $s = 50$

$$h''(s) = 300 - 12s \text{، ومنه } h''(50) = -300 < 0$$

وبما أن $h''(50) < 0$ إذن للاقتران h قيمة عظمى محلية عند $s = 50$ ، وبالتعويض في المعادلة (٢)

تجد أن $v = 50$ ، أي أن حجم متوازي المستطيلات يكون أكبر ما يمكن عندما تكون $s = 50$ سم،
 $v = 50$ سم.

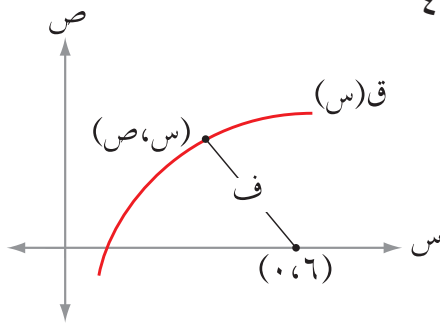
تدريب ٢

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال ٣

جد النقطة الواقعة في الربع الأول على منحنى $Q(s) = \sqrt{4-s^2}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة $(0, 6)$

الحل



افرض النقطة (s, v) تقع على منحنى Q وأن f البعد بين النقطة (s, v) والنقطة $(0, 6)$. انظر الشكل (٣-٢١).

المعطيات:

الشكل (٣-٢١)

$Q(s) = \sqrt{4-s^2}$ ، إحداثيا النقطة $(0, 6)$.

المطلوب: إيجاد إحداثيي النقطة (s, v) لتكون المسافة f أقل ما يمكن.

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات؛ بحيث تصبح المسافة f المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقتراناً لمتغير واحد، كالآتي:

$$f = \sqrt{(6-v)^2 + (0-s)^2}, \quad v = \sqrt{4-s^2}$$

$$f = \sqrt{(6-v)^2 + s^2} = \sqrt{32 + 12s - 2s^2} \quad (١) \dots\dots\dots$$

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتان f ؛ اشتق المعادلة (١) وتحقق من ذلك كما يأتي:

الجدول (٣-١٣)

	$f(s)$
	$f'(s)$
	قيم s

$$f' = \frac{12-s}{\sqrt{32+12s-2s^2}} \times 2, \quad f' = 0$$

$$\text{ومنه: } 12-s=0 \text{ ومنه } s=3$$

وبدراسة إشارة f' في الجدول (٣-١٣) تجد أن:

للاقتان f قيمة صغرى محلية عند $s=3$ ، بالتعويض تجد أن $v = \sqrt{4-9} = \sqrt{5}$

أي أن المسافة f تكون أقل ما يمكن عندما تكون النقطة (s, v) هي $(3, \sqrt{5})$

تدریب ۳

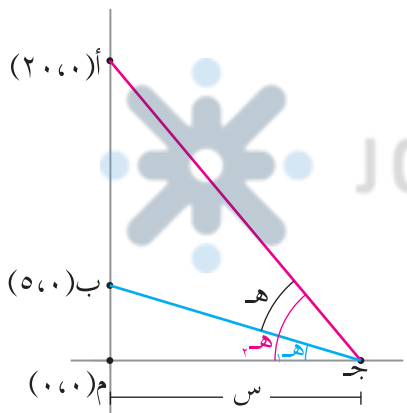
يقع المستطيل أ ب ج د في المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $s^2 - 4s + 4$ والمستقيم $s = 4$ بحيث يقع رأساه أ، ب على منحنى ق، ورأساه الآخران ج، د على المستقيم $s = 4$ ، جد بُعْدَي المستطيل أ ب ج د لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

مثال ۴

أ (٢٠، ٠)، ب (٥، ٠) نقطتان ثابتتان، ج نقطة تتحرك على محور السينات الموجب، جد بعد النقطة ج عن نقطة الأصل ليكون قياس الزاوية أ ج ب أكبر ما يمكن.

الحل

افرض أنَّ (هـ) قياس الزاوية أ ج ب، (هـ) قياس الزاوية ب ج د، (هـ) قياس الزاوية أ ج د، طول جـم = ٢٢. كما في الشكل (٣-٢٢).



الشكل (٣-٢٢)

المعطيات: أ (٢٠، ٠)، ب (٥، ٠)، ج نقطة تتحرك على محور السينات.
المطلوب: إيجاد أكبر قياس ممكن للزاوية أ ج ب.

اكتب المعادلة التي تربط المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى، اقتراناً لمتغير واحد.

$$\frac{\text{ظاهر}_2 - \text{ظاهر}_1}{\text{ظاهر}_2 + 1} = (\text{ها}_2 - \text{ها}_1) = \text{ظاهر}$$

$$\text{ظاهر}_1 = \frac{5}{\text{س}}, \text{ظاهر}_2 = \frac{20}{\text{س}} \text{ ومنه}$$

$$\text{ظاهر} = \frac{\frac{20}{\text{س}} - \frac{5}{\text{س}}}{\frac{20}{\text{س}} \times \frac{5}{\text{س}} + 1} = \frac{\frac{15}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^2 + 100}{\text{س}^2}} = \frac{15\text{س}}{\text{س}^2 + 100} \text{ وباشتقاق الطرفين تجد أن:}$$

$$\frac{٢س١٥ - ١٥٠٠}{٢(١٠٠ + ٢س)} = \frac{٢س٣٠ - ١٥٠٠ + ٢س١٥}{٢(١٠٠ + ٢س)} = \frac{٢س \times ١٥ - (١٥)(١٠٠ + ٢س)}{٢(١٠٠ + ٢س)} = \text{قاه} \times \text{هـ} =$$

الجدول (١٤-٣)

هـ	→
هـ	←
قيم س	← + + + + - - - - → ١٠

هـ = ٠ عندما ١٥٠٠-١٥٠ س^٢ = ٠ ومنه س = ١٠

وبدراسة إشارة هـ في الجدول (١٤-٣) تجد أن:

أي أن أكبر قياس ممكن للزاوية (هـ) عندما س = ١٠

أي عندما تبعد النقطة جـ بمقدار ١٠ وحدات عن نقطة الأصل.

تدريب ٤

نحتاج إلى قص لوح خشبي، على شكل مثلث متطابق الضلعين، طول كل منهما ٨ سم، إذا كانت زاوية رأس المثلث هـ متغيرة، فجد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

مثال ٥

جد أكبر حجم لموشور رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل، يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم، طول نصف قطر قاعدة المخروط (٦) سم وارتفاعه (٩) سم.

الحل

المعطيات: طول نصف قطر قاعدة المخروط (٦) سم، وارتفاعه (٩) سم.

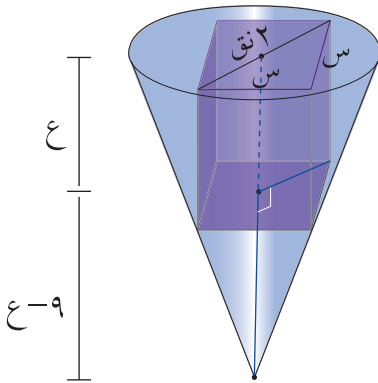
المطلوب: إيجاد أكبر حجم لموشور رباعي قائم، قاعدته مربعة الشكل، يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم طول نصف قطره ٦ سم وارتفاعه ٩ سم.

افرض أن طول قطر قاعدة الموشور (٢ نق)، وارتفاعه (ع) وطول ضلع قاعدته (س).

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقتراناً لمتغير واحد. انظر الشكل (٣-٢٣).

$$ح = س^2 ع \dots (١)$$

ولإيجاد أحد المتغيرين س، ع بدلالة الآخر استخدم نظرية فيثاغورس، وتشابه المثلثات من خلال



الشكل (٣-٢٣)

معطيات المسألة: أي أن:

$$(2 \text{ نق}) = 2 \text{ س} + 2 \text{ س} + 2 \text{ نق} = 2 \text{ س} + 2 \text{ نق} \text{ أي أن:}$$

$$2 \text{ نق} = 2 \text{ س} \dots\dots (2)$$

$$\text{ومن التشابة تجد } \frac{6}{9} = \frac{\text{نق}}{9-6} \text{ ومنه } 3 \text{ نق} = 18 - 6 = 12 \text{ ع}$$

$$\text{ع} = \frac{1}{2} (18 - 3 \text{ نق}) \dots\dots (3)$$

وبتعويض كل من (2) و (3) في المعادلة (1) تجد أن

$$\text{ح (نق)} = 18 \text{ نق} - 3 \text{ نق} = 15 \text{ نق} \dots\dots (4) \text{ وهو اقتران بمتغير واحد.}$$

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ح، اشتق المعادلة (4) وتحقق من ذلك كما يأتي:

$$\text{ح (نق)} = 36 \text{ نق} - 9 \text{ نق} = 27 \text{ نق}$$

وتكون ح (نق) = 0، عندما $36 \text{ نق} - 9 \text{ نق} = 0$ أي عندما $\text{نق} = 4$ ، $\text{نق} = 0$ (تهمل)

ولاختبار أن للاقتران قيمة عظمى محلية جد ح (نق)

$$\text{ح (نق)} = 36 - 18 = 18$$

$$\text{ومن ح (4)} = 36 - 18 = 18 > 0$$

إذن للاقتران قيمة عظمى محلية عند $\text{نق} = 4$. لماذا؟

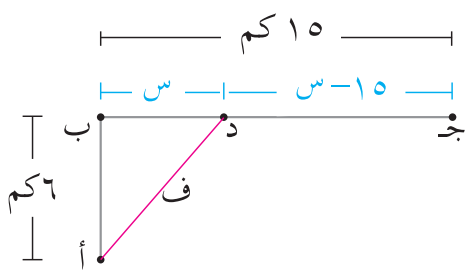
أي أن أكبر حجم للموشور عندما تكون $\text{نق} = 4$

$$\text{ومنه يكون حجم موشور ح (4)} = 18 \times 16 - 3 \times 64 = 96 \text{ سم}^3.$$

تدريب ٥

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم، طول نصف قطر قاعدته ٦ سم، وارتفاعه ١٢ سم، بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي.

مثال ٦



الشكل (٣-٢٤)

يقف رجل عند النقطة أ التي تبعد ٦ كم جنوب النقطة ب، يريد أن يصل إلى النقطة ج الواقعة شرق النقطة ب، مروراً بالنقطة د، إذا كان يسير بسرعة ٣ كم/ساعة عند الانتقال من النقطة أ إلى النقطة د، ويسير بسرعة ٦ كم/ساعة عند الانتقال من النقطة د إلى النقطة ج، فحدد موقع النقطة د بحيث يصل في أقصر وقت ممكن، علماً بأن البعد بين النقطة ب والنقطة ج (١٥) كم. انظر الشكل (٣-٢٤).

الحل

المعطيات: أ ب = ٦ كم، ب ج = ١٥ كم

سرعة الرجل عند الانتقال من أ إلى د = ٣ كم/ساعة

سرعة الرجل عند الانتقال من د إلى ج = ٦ كم/ساعة

المطلوب: تعيين موقع النقطة (د) الذي يجعل الرجل يصل إلى النقطة (ج) مروراً بالنقطة (د) بأقصر وقت.

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقتراناً لمتغير واحد.

$$\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \text{الزمن}$$

$$\frac{س - ١٥}{٦} + \frac{ف}{٣} = \text{ن} \quad (١) \dots\dots\dots$$

ولإيجاد أحد المتغيرين س أو ف بدلالة الآخر استخدم نظرية فيثاغورس من خلال معطيات المسألة؛ أي أن:

$$ف^2 = س^2 + ٣٦ \quad (٢) \dots\dots\dots$$

وبالتعويض في المعادلة (١) نجد أن:

$$\frac{س - ١٥}{٦} + \frac{\sqrt{س^2 + ٣٦}}{٣} = \text{ن(س)} \quad (٣) \dots\dots\dots$$

وهو اقتران بمتغير واحد

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ن اشتق المعادلة (٣) وتحقق من ذلك كما يأتي:

$$ن(س) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{س}{\sqrt{36+س^2}} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{36+س^2} - س}{3\sqrt{36+س^2}}$$

وتكون ن(س) = ٠ عندما ٢ = س = $\sqrt{36+س^2}$ ومنه ٣ = س = ٢ أي عندما س = $\sqrt{36+س^2}$

ولاختبار أن للاقتران قيمة صغرى محلية ندرس إشارة ن في الجدول (٣-١٥) تجد أن:

الجدول (٣-١٥)

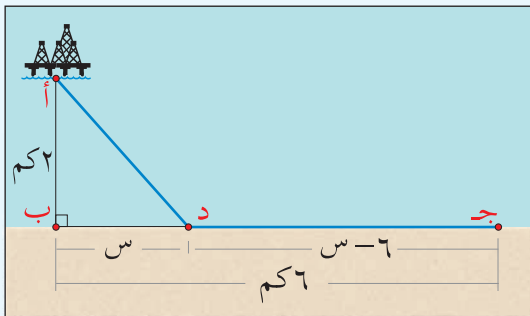
	ن(س)
	ن(س)
	س

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = $\sqrt{36+س^2}$

أي أن النقطة د تبعد عن ب بمقدار $\sqrt{36+س^2}$ كم

تدريب ٦

يقع حقل نفط في البحر عند النقطة أ التي تبعد ٢ كم عن أقرب نقطة ب على الساحل، وأردنا أن نضخ البترول من الحقل إلى المصفاة التي تقع عند النقطة ج على الساحل، وتبعد ٦ كم من ب وذلك بواسطة أنابيب في البحر على خط مستقيم حتى النقطة د على الساحل، ثم بواسطة أنابيب على اليابسة على خط مستقيم من د إلى ج، على فرض أن الأنابيب في البحر وفي اليابسة في مستوى واحد، إذا كانت تكلفة الأنابيب تحت سطح البحر ٥٠٠٠٠٠ دينار لكل كيلومتر وعلى اليابسة ٣٠٠٠٠٠ دينار لكل كيلومتر، فأجب عما يأتي:



الشكل (٣-٢٥)

(١) أين يجب أن تكون د لتحقيق أقل تكلفة ممكنة؟

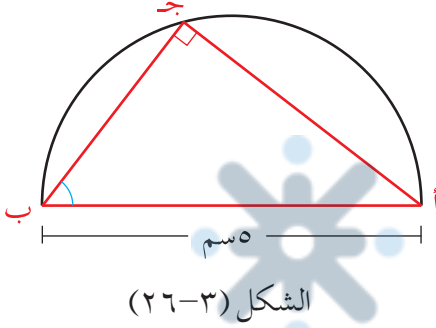
(٢) أين يجب أن تكون د لتحقيق أكبر تكلفة ممكنة؟

(١) جد العدد الذي ينتمي للفترة $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ الذي يجعل ناتج جمع العدد ومقلوبه أكبر ما يمكن.

(٢) وعاء أسطواني الشكل مفتوح من الأعلى، حجمه 1000π سم^٣، جد أقل مساحة ممكنة من الصفيح لتصنيعه.

(٣) جد إحداثيي النقطة أ(س، ص) الواقعة على منحنى العلاقة ص = س^٢ التي بُعدها عن النقطة ب(١٨، ٠) أقل ما يمكن.

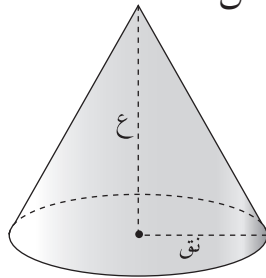
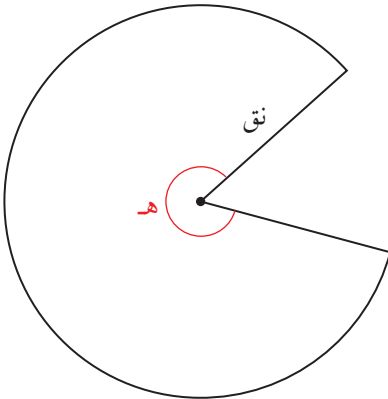
(٤) جد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (٣، ٤) ويصنع مع المحورين الإحداثيين الموجبين مثلثاً مساحته أقل ما يمكن.



(٥) يمثل الشكل (٣-٢٦) نصف دائرة طول قطرها أب(٥سم)، بدأت النقطة ج الحركة على الدائرة من النقطة ب باتجاه عقارب الساعة لترسم مع القطر مثلثاً جد قياس الزاوية أ ب ج التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

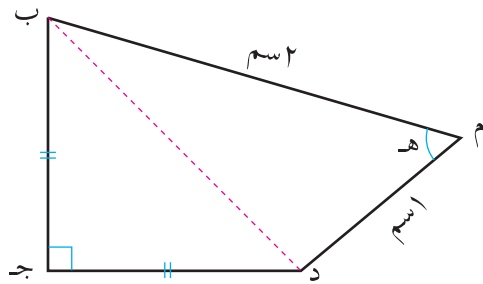
(٦) جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٤ سم بحيث تنطبق قاعدته على قطر الدائرة ورأساه الآخران على الدائرة.

(٧) قطاع دائري قياس زاويته المركزية هـ بالتقدير الدائري، وطول نصف قطر دائرته ٤ وحدات، حوّل إلى مخروط دائري قائم، طول نصف قطر قاعدته نق، وارتفاعه ع. جد قيمة هـ التي تجعل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن.



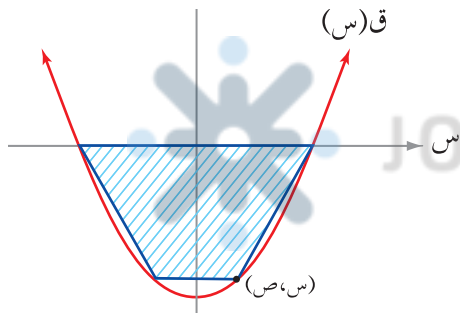
الشكل (٣-٢٧)

٨) مصنع للأجهزة الكهربائية ينتج س جهازاً سنوياً يبيع كل جهاز بسعر $(٢٠٠ - ٠,٠١ س)$ دينار، فإذا كان تكلفة إنتاج هذه الأجهزة $(٥٠ + ٢٠)$ دينار، فكم جهازاً ينتج المصنع لتحقيق أكبر ربح ممكن سنوياً؟



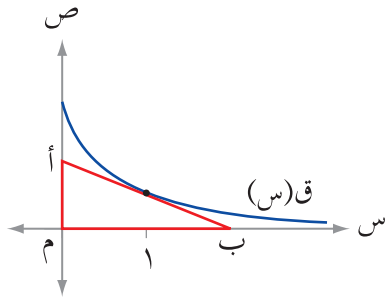
الشكل (٣-٢٨)

٩) معتمداً الشكل (٣-٢٨) الذي يمثل الشكل الرباعي م ب ج د ، الذي فيه الضلع م ب ثابت وطوله ٢ سم وفيه م د ثابت طوله ١ سم، إلا أن وضعه متحول، يمكنه أن يدور في مستوى حول النقطة م، أما الزاوية د ج ب فهي قائمة، والضلعان ج د ، ج ب متطابقان دوماً. جد قياس الزاوية (هـ) التي تجعل مساحة الشكل الرباعي عندها أكبر ما يمكن.



الشكل (٣-٢٩)

١٠) جد أكبر مساحة ممكنة لشبه منحرف يمكن رسمه تحت محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران $ق(س) = س^٢ - ٤$ ، انظر الشكل (٣-٢٩).



الشكل (٣٠-٣)

(١) معتمداً الشكل (٣٠-٣)، الذي فيه المثلث أ م ب الذي ضلعه $\overline{AB}$ يمس منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{ج}{١+س}$ عند $(١، ق(١))$ ، جد قيمة الثابت ج التي تجعل مساحة المثلث تساوي $\frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة.

(٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن بُعده عن

نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة $ف(ن) = \frac{ن}{٢} - جا٢ ن$ ، $ن \in [٠، \pi]$ ، جد تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته.

(٣) إذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{٢٧ - س}$ ، $س \in ح$ ، فجد كلاً مما يأتي:
أ) قيم س التي يكون عندها للاقتران ق نقط حرجة.

ب) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.

ج) قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى مبيناً نوعها.

(٤) عيّن قاعدة الاقتران $ق(س) = أس٣ + ب س٢ + ج س + د$ ، حيث:

أ، ب، ج، د أعداد حقيقية ثابتة، ويمر منحنى الاقتران ق بالنقطة $(٥، ٠)$ ومعادلة المماس لمنحناه عند النقطة $(١، ق(١))$ هي: $٩س + ص - ٩ = ٠$ ، ولمنحناه نقطة انعطاف هي $(٢، ١١ -)$.

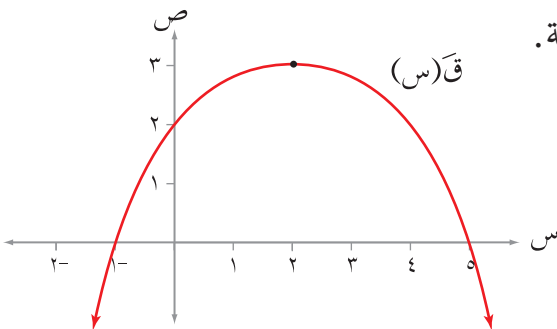
(٥) يمثل الشكل (٣١-٣) منحنى المشتقة الأولى لكثير الحدود $ق(س)$ جد:
أ) النقط الحرجة للاقتران ق.

ب) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.

ج) قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى محلية.

د) فترات التقعر لمنحنى ق.

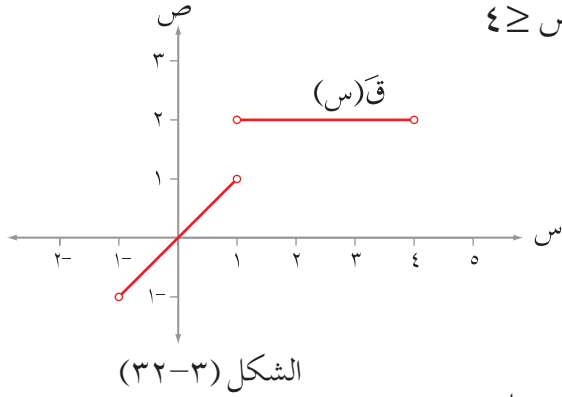
هـ) قيم س التي يكون عندها للاقتران نقطة انعطاف.



الشكل (٣١-٣)

٦) إذا كان الاقتران ق(س) متصل على $[-1, 4]$ ،

$$\left. \begin{aligned} & \text{ج س}^2 + \text{س} + \text{هـ} ، \quad 1 > \text{س} \geq 1- \\ & \text{أ س} + \text{ب} ، \quad 4 \geq \text{س} \geq 1 \end{aligned} \right\} = \text{وكان ق(س)}$$



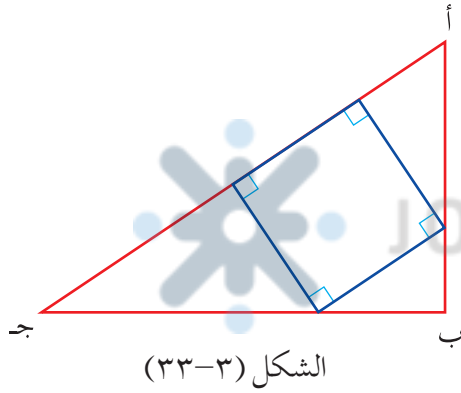
وُمثِّلَ منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق كما في الشكل (٣-٣٢)، فجد كلاً مما يلي:

أ) مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق.

ب) فترات التزايد، وفترات التناقص للاقتران ق.

ج) قيم س التي يكون عندها للاقتران ق قيم قصوى محلية.

د) قيم كلٍّ من الثوابت أ، ب، ج، د، هـ، علماً بأن ق(١-) = ٢ ، ق(٤) = ٨



٧) يمثل الشكل (٣-٣٣) مثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٦ سم، ب ج = ٨ سم، وبداخله مستطيل يقع رأسان من رؤوسه على وتر المثلث والرأسان الآخران يقع كلُّ منهما على ضلعي القائمة. جد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن.

٨) يتكون هذا السؤال من (١١) فقرة من نوع الاختيار

من متعدد، يلي كل فقرة (٤) بدائل، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:-

(١) تتحرك نقطة على خط مستقيم بحيث إن المسافة (ف) بالأمتار التي تقطعها في زمن قدره

(ن) ثانية هي: ف(ن) = $٦ن^2 - ٣ن + ١$ ، المسافة ف عندما يصبح التسارع صفراً هي:

أ) ١٤ م

ب) ١٨ م

ج) ٢٩ م

د) ٣٤ م

(٢) معدل تغير حجم كرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها

٥ سم يساوي:

أ) $١٠٠ \text{ سم}^3 / \text{سم}$

ب) $٤\pi \text{ سم}^3 / \text{سم}$

ج) $٢٠\pi \text{ سم}^3 / \text{سم}$

د) $١٠٠\pi \text{ سم}^3 / \text{سم}$

(٣) وعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى أسفل، ارتفاعه ١٦ سم، وطول نصف قطر قاعدته ٤ سم، صُبَّ الماء فيه بمعدل 2π سم^٣/ث، فإنَّ معدل تغير ارتفاع الماء فيه في اللحظة التي يكون ارتفاع الماء ٨ سم يساوي:

أ ($\frac{1}{2}$ سم/ث) ب (2 سم/ث)

ج ($\frac{1}{8\pi}$ سم/ث) د ($\frac{1}{\pi^2}$ سم/ث)

(٤) إذا كان $q(s) = 12s + 6(2-s)^2$ فإنَّ قيم m التي تجعل منحنى الاقتران q مقعرًا للأسفل:

أ ($(-\infty, 2]$) ب ($(-\infty, 2)$)

ج ($(2, \infty)$) د ($(2, \infty)$)

(٥) إذا كان لمنحنى الاقتران $q(s) = 4s$ نقطة انعطاف عند $s = \frac{\pi}{4}$ فإنَّ ميل المماس عندها يساوي:

أ (-4) ب (4)

ج (-2) د (-1)

(٦) إذا كان $q(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^2}$ فإنَّ منحنى الاقتران q متناقص على الفترة:

أ ($(-\infty, 0)$) ب ($(0, 1)$)

ج ($[0, 1]$) د ($(0, 1)$)

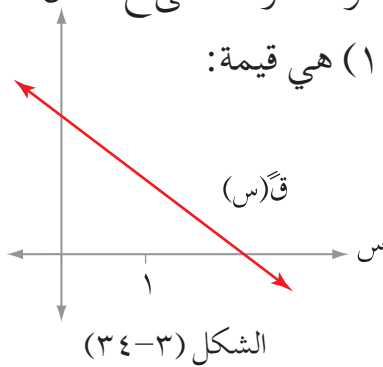
(٧) الشكل (٣-٣٤) يمثل منحنى $q(s)$ للاقتران q كثير الحدود المعروف على h ، ص إذا كان للاقتران q نقطة حرجة عند $(1, q(1))$ ، فإنَّ $q(1)$ هي قيمة:

أ (عظمى محلية)

ب (عظمى مطلقة)

ج (صغرى مطلقة)

د (صغرى محلية)



(٨) إذا كان $q(s) = \sqrt[3]{s^2}$: $s \in [1, 1]$ ، فإنَّ للاقتران q قيمة صغرى مطلقة عند النقطة:

أ ($(-1, 1)$) ب ($(1, 1)$)

ج ($(0, 0)$) د ($(1, 0)$)

(٩) يُراد صنع علبة مفتوحة من الأعلى من قطعة كرتون مستطيلة الشكل أبعادها ١٦ سم، ٣٠ سم وذلك بقص مربعات متساوية من زواياها الأربع طول كل منها (س) وحدة ، ثم طيّ الجوانب للأعلى ، ما قيمة س التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن؟

أ (١٢ سم ب) $\frac{10}{3}$ سم

جـ) ١٠ سم د (٨ سم

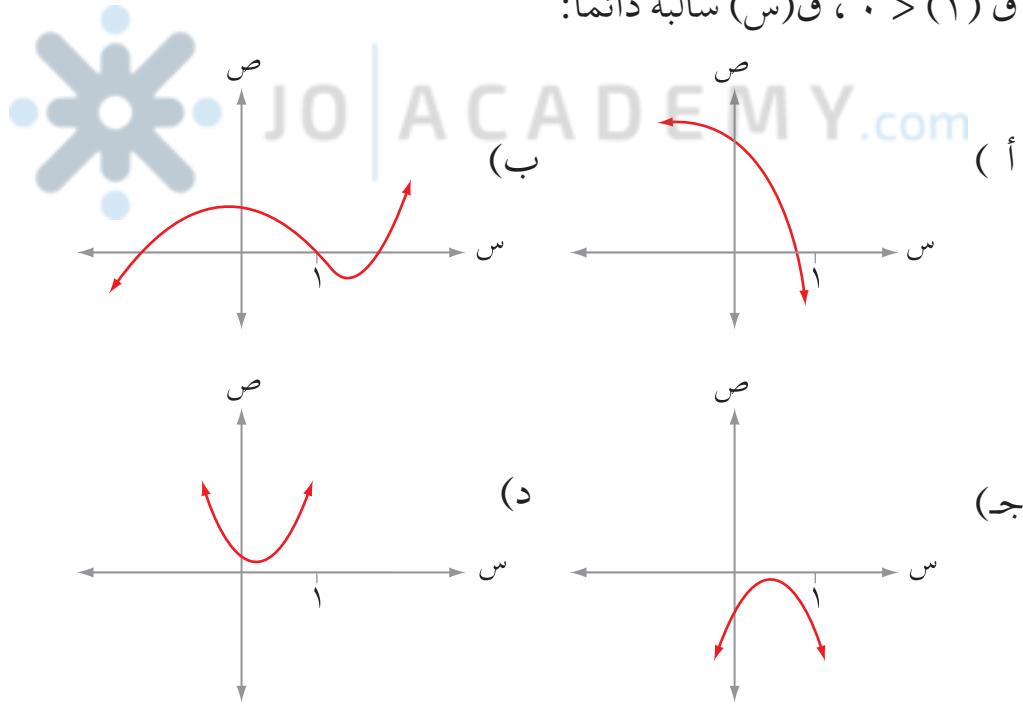
(١٠) إذا كان ق(س) = جتاس - جاس: س $\in [\pi, 0]$ فإن قيمة س التي يكون للاقتران عندها قيمة صغرى مطلقة هي:

أ (٠ ب) $\frac{\pi}{4}$

جـ) $\frac{\pi}{2}$ د ($\frac{\pi}{4}$

* (١١) أي المنحنيات في الشكل (٣-٣٥) يمثل رسم الاقتران ق الذي فيه ق (٠) < ٠ ،

ق (١) > ٠ ، ق(س) سالبة دائماً:



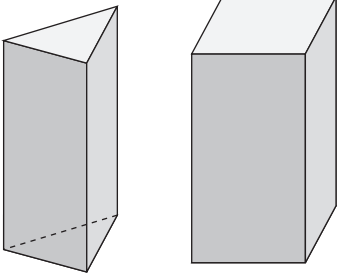
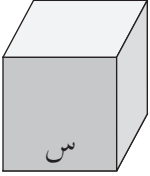
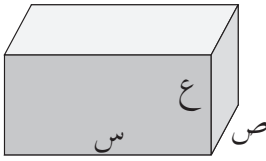
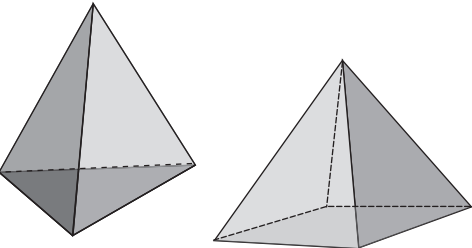
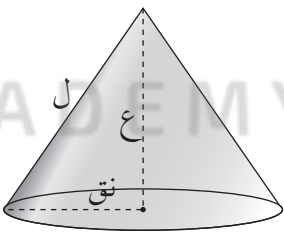
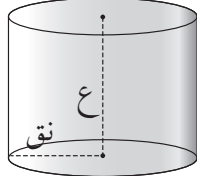
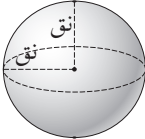
الشكل (٣-٣٥)

* السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

ملحق (١)

قوانين رياضية مهمة (المعدلات المرتبطة، تطبيقات القيم القصوى)

(٩) محيط المستطيل = $2(س + ص)$ مساحة المستطيل = $(س \times ص)$ حيث س: البعد الأول ص: البعد الثاني	(١) المسافة بين نقطتين $(س_١, ص_١)$ ، $(س_٢, ص_٢)$ $ف = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$
(١٠) محيط المربع = $4س$ مساحة المربع = $س^2$ حيث س: طول الضلع	(٢) نظرية فيثاغورس: (الوتر)^٢ = مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين. $ع^2 = س^2 + ص^2$
(١١) محيط الدائرة = $2\pi ر$ مساحة الدائرة = $\pi ر^2$ حيث ر: طول نصف القطر	(٣) قانون جيب التمام: لإيجاد ضلع في مثلث عُلِمَ فيه طولاً ضلعين وزاوية محصورة بينهما: $ل^2 = س^2 + ص^2 - 2سص \cos هـ$
(١٢) مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2} ر^2 هـ$ طول القوس = $ر \times هـ$ حيث هـ: الزاوية المركزية	(٤) بعد النقطة $(س_١, ص_١)$ عن المستقيم $أس + ب ص + ج = ٠$ البعد = $\frac{ أس_١ + ب ص_١ + ج }{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$
(١٣) مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times$ طول القاعدة $\times$ الارتفاع إذا عُلِمَ فيه طولاً ضلعين وزاوية محصورة بينهما هـ: الزاوية المحصورة بين الضلعين مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times$ طول الضلع الأول $\times$ طول الضلع الثاني $\times \sin هـ$ مساحة المثلث متطابق الأضلاع = $\frac{1}{2} س^2 \sin ٦٠$ حيث س: طول ضلع المثلث	(٥) إحداثيات منتصف المسافة بين نقطتين $(س_١, ص_١)$ ، $(س_٢, ص_٢)$ هو: $(\frac{س_١ + س_٢}{2}, \frac{ص_١ + ص_٢}{2})$ (٦) قانون الجيب $\frac{أ}{\sin ا} = \frac{ب}{\sin ب} = \frac{ج}{\sin ج}$
(١٤) مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة $\times$ الارتفاع	(٧) إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية $\frac{أ}{س} = \frac{ب}{ص} = \frac{ج}{ع}$
(١٥) مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2} \times$ مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين $\times$ الارتفاع	(٨) الربح = سعر البيع - سعر التكلفة
(١٦) المسافة = السرعة $\times$ الزمن	

(٢٢) المنشور (الموشور) القائم: هو مجسم له قاعدتان مستويتان ومتطابقتان ومتوازيان، وأسطحه الجانبية مستطيلات، إذا كانت قاعدته مثلثة الشكل يسمى منشورًا قائمًا ثلاثيًا، وإذا كانت قاعدته مربعة الشكل يسمى منشورًا قائمًا رباعيًا. مساحة المنشور القائم = محيط القاعدة × الارتفاع حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع 	(١٧) حجم المكعب = s^3 المساحة الكلية = $6s^2$ المساحة الجانبية = $4s^2$ حيث s: طول ضلع المكعب  (١٨) حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع المساحة الجانبية = $2(s + v) \times e$ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين $= 2(s + v) \times e + 2s \times v$ 
(٢٣) الهرم القائم: عبارة عن مجسم تكون قاعدته منتظمة، والأوجه الجانبية عبارة عن مثلثات متطابقة الضلعين، ويسمى ارتفاع المثلث المتطابق الضلعين: الارتفاع الجانبي للهرم. ويسمى الهرم بالهرم القائم الثلاثي إذا كانت قاعدته مثلث متطابق الأضلاع، وهرمًا قائمًا رباعيًا إذا كانت قاعدته مربعة الشكل. المساحة الجانبية للهرم = $\frac{1}{2} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي}$ حجم الهرم القائم = $\frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{ارتفاع الهرم}$ 	(١٩) المخروط الدائري القائم الحجم = $\frac{\pi}{3} \times \text{نق}^2 \times e$ مساحة سطح المخروط = $\pi \times \text{نق} \times l + \pi \times \text{نق}^2$  (٢٠) الاسطوانة: الحجم = $\pi \times \text{نق}^2 \times e$ المساحة الجانبية = $2\pi \times \text{نق} \times e$ المساحة الكلية = $2\pi \times \text{نق}^2 + 2\pi \times \text{نق} \times e$ 
(٢٤) زاوية الارتفاع أو الانخفاض: هي الزاوية المحصورة بين خط البصر (النظر) والخط الأفقي المارّ بالعين.	(٢١) الكرة الحجم = $\frac{4}{3} \pi \times \text{نق}^3$ مساحة سطح الكرة = $4\pi \times \text{نق}^2$ 

متطابقات مثلثية

$\begin{aligned} \text{جاس} - \text{جاص} &= 2 \text{جتا} - \frac{1}{4} (\text{س} + \text{ص}) \text{جا} - \frac{1}{4} (\text{س} - \text{ص}) \\ \text{جاس} + \text{جاص} &= 2 \text{جا} - \frac{1}{4} (\text{س} + \text{ص}) \text{جتا} - \frac{1}{4} (\text{س} - \text{ص}) \\ \text{جتاس} - \text{جتاص} &= 2 - \frac{1}{4} \text{جا} - \frac{1}{4} (\text{س} + \text{ص}) \text{جا} - \frac{1}{4} (\text{س} - \text{ص}) \\ \text{جتاس} + \text{جتاص} &= 2 \text{جتا} - \frac{1}{4} (\text{س} + \text{ص}) \text{جتا} - \frac{1}{4} (\text{س} - \text{ص}) \\ \text{جتا} &= \left(\text{س} - \frac{\pi}{4} \right) \text{جاس} \\ \text{جا} &= \left(\text{س} - \frac{\pi}{4} \right) \text{جتاس} \\ \text{ظا} &= \left(\text{س} - \frac{\pi}{4} \right) \text{ظتاس} \\ \text{ظتا} &= \left(\text{س} - \frac{\pi}{4} \right) \text{ظاس} \\ \text{جا} &= \left(\text{س} + \frac{\pi}{4} \right) \text{جتاس} \\ \text{جتا} &= \left(\text{س} + \frac{\pi}{4} \right) \text{جاس} \\ \text{جا} &= (\text{س} - \pi) \text{جاس} \\ \text{جتا} &= (\text{س} - \pi) \text{جتاس} \\ \text{ظا} &= (\text{س} - \pi) \text{ظاس} \\ \text{جا} &= (\text{س} + \pi) \text{جاس} \\ \text{جتا} &= (\text{س} + \pi) \text{جتاس} \\ \text{ظا} &= (\text{س} + \pi) \text{ظاس} \\ \text{جا} &= (\text{س} -) \text{جاس} \\ \text{جتا} &= (\text{س} -) \text{جتاس} \\ \text{ظا} &= (\text{س} -) \text{ظاس} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{ظاس} &= \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}, \text{ظتاس} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \\ \text{قاس} &= \frac{1}{\text{جتاس}}, \text{قتاس} = \frac{1}{\text{جاس}} \\ \text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س} &= 1 \\ 1 + \text{ظا}^2 \text{س} &= \text{قا}^2 \text{س} \\ 1 + \text{ظتا}^2 \text{س} &= \text{قتا}^2 \text{س} \\ \text{جا}^2 \text{س} &= 2 \text{جاس جتاس} \\ \text{جتا}^2 \text{س} &= 2 - 1 \text{جا}^2 \text{س} \\ 2 \text{جتا}^2 \text{س} &= 1 - \text{جا}^2 \text{س} \\ \text{جتا}^2 \text{س} - \text{جا}^2 \text{س} &= \\ \text{جا} (\text{أ} + \text{ب}) &= \text{جاأجتاب} + \text{جتأأجاب} \\ \text{جا} (\text{أ} - \text{ب}) &= \text{جاأجتاب} - \text{جتأأجاب} \\ \text{جتا} (\text{أ} + \text{ب}) &= \text{جتأأجتاب} - \text{جاأأجاب} \\ \text{جتا} (\text{أ} - \text{ب}) &= \text{جتأأجتاب} + \text{جاأأجاب} \\ \text{ظا} (\text{أ} + \text{ب}) &= \frac{\text{ظاأ} + \text{ظاب}}{1 - \text{ظاأ} \text{ظاب}} \\ \text{ظا} (\text{أ} - \text{ب}) &= \frac{\text{ظاأ} - \text{ظاب}}{1 + \text{ظاأ} \text{ظاب}} \\ \text{جا}^2 \text{س} &= \frac{1}{4} (1 - \text{جتا}^2 \text{س}) \\ \text{جتا}^2 \text{س} &= \frac{1}{4} (1 + \text{جتا}^2 \text{س}) \\ \text{ظا}^2 \text{س} &= \frac{2 \text{ظاس}}{1 - \text{ظا}^2 \text{س}} \\ \text{جاس جاص} &= \frac{1}{4} (\text{جتا} (\text{س} - \text{ص}) - \text{جتا} (\text{س} + \text{ص})) \\ \text{جاس جتاص} &= \frac{1}{4} (\text{جا} (\text{س} + \text{ص}) + \text{جا} (\text{س} - \text{ص})) \\ \text{جتاس جتاص} &= \frac{1}{4} (\text{جتا} (\text{س} + \text{ص}) + \text{جتا} (\text{س} - \text{ص})) \end{aligned}$
--	--

